

СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В трех частях

Под общей редакцией
доктора физико-математических наук,
профессора *А. П. Рябушко*

Часть I

*Допущено Министерством
народного образования БССР
в качестве учебного пособия
для студентов инженерно-технических
специальностей вузов*

Минск
«Высшая школа»
1990

ББК 22.11я73
С23
УДК 51 (076.1) (075.8)

Авторы: А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть

Рецензенты: кафедра высшей математики Московского энергетического института; зав. кафедрой высшей математики Минского радиотехнического института, д-р физ.-мат. наук, проф. Л. А. Черкас

1602010000—098
С $\frac{\quad}{\text{М304 (03)—90}}$ 10—90

ISBN 5-339-00326-4 (ч. 1)
ISBN 5-339-00483-X

© Коллектив авторов,
1990

ПРЕДИСЛОВИЕ

В Основных направлениях перестройки высшего и среднего специального образования в стране, приказах Государственного комитета СССР по народному образованию и других документах подчеркивается необходимость перехода от пассивных форм обучения к активной творческой работе со студентами, от «валового» обучения к усилению индивидуального подхода, к развитию творческих способностей обучаемых путем расширения их самостоятельной работы. Такой путь развития и перестройки высшей школы предполагает новое методическое обеспечение учебного процесса: создание современных методик проведения лекционных, практических и лабораторных занятий, подкрепленных соответствующими методическими и учебными пособиями, разработку новых форм самостоятельной работы, методов ее контроля и т. д.

Имеющиеся в настоящее время сборники задач и упражнений по общему курсу высшей математики для вузов не дают возможности индивидуализировать обучение из-за своей структуры (малое количество однотипных задач и упражнений, неудачный с методической точки зрения подбор задач). Активизация познавательной деятельности студентов, выработка у них способности самостоятельно решать достаточно сложные проблемы может быть достигнута, по мнению авторов, при такой организации учебного процесса, когда каждому студенту выдаются индивидуальные домашние задания (ИДЗ) и достаточно часто проводятся самостоятельные (контрольные) работы во время аудиторных занятий (АЗ) с обязательным последующим контролем их выполнения и выставлением оценок. Это мнение подкрепляется личным опытом авторов и педагогическими экспериментами, проведенными в последние годы в ряде вузов, например в Белорусском институте механизации сельского хозяйства, Белорусском и Дальневосточном политехнических институтах.

Данная книга является первой частью комплекса учебных пособий под общим названием «Сборник индивидуальных заданий по высшей математике», написанного в соответствии с действующими программами курса высшей математики в объеме 380—450 часов для инженерно-технических специальностей вузов. Этот комплекс также может быть использован в вузах других профилей, в которых количество часов, отведенное на изучение высшей математики, значительно меньше. (Для этого из предлагаемого материала следует сделать необходимую выборку.) Кроме того, он вполне доступен для студентов вечерних и заочных отделений вузов.

Предлагаемое пособие адресовано преподавателям и студентам и предназначено для проведения практических занятий и самостоятельных (контрольных) работ в аудитории и выдачи ИДЗ по всем разделам курса высшей математики.

В первой части данного комплекса содержится материал по линейной и векторной алгебре, аналитической геометрии и дифференциальному исчислению функций одной переменной.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам — коллективу кафедры высшей математики Московского энергетического института, возглавляемой членом-корреспондентом АН СССР, доктором физико-математических наук, профессором С. И. Похожаевым, и заведующему кафедрой высшей математики Минского радиотехнического института, доктору физико-математических наук, профессору Л. А. Черкасу, а также сотрудникам этих кафедр кандидатам физико-математических наук, доцентам Л. А. Кузнецову, П. А. Шмелеву, А. А. Карпуку — за ценные замечания и советы, способствовавшие улучшению книги.

Все отзывы и пожелания просьба присылать по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, издательство «Высшая школа».

Авторы

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Охарактеризуем структуру пособия, методику его использования, организацию проверки и оценки знаний, навыков и умений студентов.

Весь практический материал по курсу высшей математики разделен на главы, в каждой из которых даются необходимые теоретические сведения (основные определения, понятия, формулировки теорем, формулы), используемые при решении задач и выполнении упражнений. Изложение этих сведений иллюстрируется решенными примерами. (Начало решения примеров обозначается символом ►, а конец — ◀.) Затем даются подборки задач с ответами для всех практических аудиторных занятий (АЗ) и самостоятельных (мини-контрольных) работ на 10—15 минут во время этих занятий. И, наконец, приводятся недельные индивидуальные домашние задания (ИДЗ), каждое из которых содержит 30 вариантов и сопровождается решением типового варианта. Часть задач из ИДЗ снабжена ответами. В конце каждой главы помещены дополнительные задачи повышенной трудности и прикладного характера.

В приложении приведены одно- и двухчасовые контрольные работы (каждая по 30 вариантов) по важнейшим темам курса.

Нумерация АЗ сквозная и состоит из двух чисел: первое из них указывает на главу, а второе — на порядковый номер АЗ в этой главе. Например, шифр АЗ-2.1 означает, что АЗ относится ко второй главе и является первым по счету. В первой части пособия содержится 27 АЗ и 14 ИДЗ.

Для ИДЗ также принята нумерация по главам. Например, шифр ИДЗ-5.2 означает, что ИДЗ относится к пятой главе и является вторым. Внутри каждого ИДЗ принята следующая нумерация: первое число означает номер задачи в данном задании, а второе — номер варианта. Таким образом, шифр ИДЗ-5.2 : 16 означает,

что студент должен выполнить 16-й вариант из ИДЗ-5.2, который содержит задачи 1.16, 2.16, 3.16, 4.16. При выдаче ИДЗ студентам номера выполняемых вариантов можно менять от задания к заданию по какой-либо системе или случайным образом. Более того, можно при выдаче ИДЗ любому студенту составить его вариант, комбинируя однотипные задачи из разных вариантов. Например, шифр ИДЗ-3.1:1.2; 2.4; 3.6 означает, что студенту следует решать в ИДЗ-3.1 первую задачу из варианта 2, вторую — из варианта 4 и третью — из варианта 6. Такой комбинированный метод выдачи ИДЗ позволяет из 30 вариантов получить большое количество новых вариантов.

Внедрение ИДЗ в учебный процесс некоторых вузов (Белорусский институт механизации сельского хозяйства, Белорусский политехнический институт, Дальневосточный политехнический институт и др.) показало, что целесообразнее выдавать ИДЗ не после каждого АЗ (которых, как правило, два в неделю), а одно недельное ИДЗ, включающее в себя основной материал двух АЗ данной недели.

Дадим некоторые общие рекомендации по организациям работы студентов в соответствии с настоящим пособием.

1. В вузе студенческие группы по 25 человек, проводятся два АЗ в неделю, планируются еженедельные необязательные для посещения студентами консультации, выдаются недельные ИДЗ. При этих условиях для систематического контроля с выставлением оценок, указанием ошибок и путей их исправления могут быть использованы выдаваемые каждому преподавателю матрицы ответов и банк листов решений, которые кафедра заготавливает для ИДЗ (студентам они не выдаются). Если матрицы ответов составляются для всех задач из ИДЗ, то листы решений разрабатываются только для тех задач и вариантов, где важно проверить правильность выбора метода, последовательности действий, навыков и умений при вычислениях. Кафедра определяет, для каких ИДЗ нужны листы решений. Листы решений (один вариант располагается на одном листе) используются при самоконтроле правильности выполнения заданий студентами, при взаимном студенческом контроле, а чаще всего при комбинированном контроле: преподаватель проверяет лишь правильность выбора метода, а студент по листу решений — свои вычисления. Эти методы позволяют проверить

ИДЗ 25 студентов за 15—20 минут с выставлением оценок в журнал.

2. Студенческие группы в вузе по 15 человек, проводятся по два АЗ в неделю, в расписание для каждой группы включены обязательные два часа в неделю самоподготовки под контролем преподавателя. При этих условиях (которые созданы, например, в Белорусском институте механизации сельского хозяйства) организация индивидуальной, самостоятельной, творческой работы студентов, оперативного контроля за качеством этой работы значительно улучшается. Рекомендованные выше методы пригодны и в данном случае, однако появляются новые возможности. На АЗ быстрее проверяются и оцениваются ИДЗ, во время обязательной самоподготовки можно проконтролировать проработку теории и решение ИДЗ, выставить оценки части студентов, принять задолженности по ИДЗ у отстающих.

Накапливание большого количества оценок за ИДЗ, самостоятельные и контрольные работы в аудитории позволяет контролировать учебный процесс, управлять им, оценивать качество усвоения изучаемого материала.

Все это дает возможность отказаться от традиционного итогового семестрового (годового) экзамена по материалу всего семестра (учебного года) и ввести так называемый блочно-цикловой (модульно-цикловой) метод оценки знаний и навыков студентов, состоящий в следующем. Материал семестра (учебного года) разделяется на 3—5 блоков (модулей), по каждому из которых выполняются АЗ, ИДЗ и в конце каждого цикла — двухчасовая письменная коллоквиум-контрольная работа, в которую входят 2—3 теоретических вопроса и 5—6 задач. Учет оценок по АЗ, ИДЗ и коллоквиуму-контрольной позволяет вывести объективную общую оценку за каждый блок (модуль) и итоговую оценку по всем блокам (модулям) семестра (учебного года). Подобный метод внедряется, например, в Белорусском институте механизации сельского хозяйства.

В заключение отметим, что пособие в основном ориентировано на студента средних способностей, и усвоение содержащегося в нем материала гарантирует удовлетворительные и хорошие знания по курсу высшей математики. Для одаренных и отлично успевающих студентов необходима подготовка заданий повышенной сложности (индивидуальный подход в обучении!) с перспективными поощрительными мерами. Например, можно разрабо-

тать для таких студентов специальные задания на весь семестр, включающие задачи настоящего пособия и дополнительные более сложные задачи и теоретические упражнения (для этой цели, в частности, предназначены дополнительные задачи в конце каждой главы). Преподаватель может выдать эти задания в начале семестра, установить график их выполнения (под своим контролем), разрешить свободное посещение лекционных или практических занятий по высшей математике и в случае успешной работы выставить отличную оценку до экзаменационной сессии.

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. МАТРИЦЫ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1.1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Определителем n -го порядка называется число Δ_n , записываемое в виде квадратной таблицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

и вычисляемое, согласно указанному ниже правилу, по заданным числам a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$), которые называются *элементами определителя* (всего их n^2). Индекс i указывает номер строки, а j — номер столбца квадратной таблицы (1.1), на пересечении которых находится элемент a_{ij} . Любую строку или столбец этой таблицы будем называть *рядом*.

Главной диагональю определителя называется совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$ -го порядка Δ_{n-1} , полученный из определителя n -го порядка Δ_n вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Значение определителя Δ_n находится по следующему правилу. Для $n = 2$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.2)$$

Для $n = 3$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \quad (1.3)$$

где

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Величины A_{11}, A_{12}, A_{13} — алгебраические дополнения, а M_{11}, M_{12}, M_{13} — миноры определителя Δ_3 , соответствующие его элементам a_{11}, a_{12}, a_{13} . Эти миноры являются определителями второго порядка, получаемыми из определителя Δ_3 вычеркиванием соответствующих

строки и столбца. Например, чтобы найти минор M_{12} , следует в определителе Δ_3 вычеркнуть первую строку и второй столбец.

Для произвольного n

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k}, \quad (1.4)$$

где $A_{1k} = (-1)^{1+k} M_{1k}$, а миноры M_{1k} , являющиеся определителями $(n-1)$ -го порядка, получаются из Δ_n вычеркиванием первой строки и k -го столбца.

Например,

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 1 = 17; \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 4(-7) - 7(21 - 25) - 2 \cdot 5 = -10; \\ \Delta_4 &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} - \\ -1 &\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -(4(-4) + 3 \cdot 4 - 2 \cdot 0) - (0(-4) - 4 - 2 \cdot 5) + 2(0(-12) - \\ &\quad - 4 \cdot 4 - 2 \cdot 15) = -74. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. Если элементами определителя являются некоторые функции, то данный определитель, вообще говоря, тоже функция (но может быть и числом). Например,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} &= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x; \\ \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} &= \cos^2 x + \sin^2 x = 1; \\ \begin{vmatrix} \operatorname{tg} x & 2 \\ 1/2 & \operatorname{ctg} x \end{vmatrix} &= 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Правило вычисления определителя Δ_3 равносильно *правилу треугольников (правилу Саррюса)*:

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ &\quad - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Схематическая запись этого правила приведена ниже:



Например,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \cdot 2 + 4(-1)(-3) - \\ - ((-3) \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 5(-1)1) = 71.$$

Перечислим *основные свойства определителей*:

1) сумма произведений элементов любого ряда определителя и их алгебраических дополнений не зависит от номера ряда и равна этому определителю:

$$\Delta_n = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}. \quad (1.6)$$

Эти равенства можно было бы (как и формулу (1.4)) принять за правило вычисления определителя. Первое из них называется *разложением Δ_n по элементам i -й строки*, а второе — *разложением Δ_n по элементам j -го столбца*;

2) значение определителя не меняется после замены всех его строк соответствующими столбцами, и наоборот;

3) если поменять местами два параллельных ряда определителя, то он изменит знак на противоположный;

4) определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю;

5) если все элементы некоторого ряда определителя имеют общий множитель, то последний можно вынести за знак определителя. Отсюда следует, что если элементы какого-либо ряда умножить на число λ , то определитель Δ_n умножится на это же число λ ;

6) если все элементы какого-либо ряда определителя равны нулю, то определитель также равен нулю;

7) определитель, у которого элементы двух параллельных рядов соответственно пропорциональны, равен нулю;

8) сумма всех произведений элементов какого-либо ряда определителя и алгебраических дополнений соответствующих элементов другого параллельного ряда равна нулю, т. е. верны равенства:

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0, \quad \sum_{k=1}^n a_{ki} A_{kj} = 0 \quad (i \neq j);$$

9) если каждый элемент какого-либо ряда определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых соответствующий ряд состоит из первых слагаемых, а во втором — из вторых слагаемых:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} + b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} + b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} + b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & +2 & 4 \\ 7 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & +3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 7 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 7 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix};$$

10) определитель не изменится, если ко всем элементам какого-либо его ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ряда, умноженные на одно и то же произвольное число λ . Например, для столбцов определителя это свойство выражается равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} + \lambda a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i} + \lambda a_{2j} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni} + \lambda a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим основные методы вычисления определителей.

1. *Метод эффективного понижения порядка.* В соответствии со свойством 4 вычисление определителя n -го порядка сводится к вычислению n определителей $(n-1)$ -го порядка. Этот метод понижения порядка не эффективен. Используя основные свойства определителей, вычисление $\Delta_n \neq 0$ всегда можно свести к вычислению одного определителя $(n-1)$ -го порядка, сделав в каком-либо ряду Δ_n все элементы, кроме одного, равными нулю. Покажем это на примере.

Пример 1. Вычислить определитель

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 30 & -10 & 120 & 80 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}.$$

► По свойству 5 определителей из первой строки вынесем множитель 10, а затем будем последовательно умножать полученную строку на 3, 1, 2 и складывать соответственно со второй, третьей и четвертой строками. Тогда, согласно свойству 10, имеем:

$$\Delta_4 = 10 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

По свойству 1 определителей (см. второе из равенств (1.6)) полученный определитель можно разложить по элементам второго столбца. Тогда

$$\Delta_4 = 10 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

Получили определитель третьего порядка, который можно вычислить по правилу Саррюса или подобным же приемом свести к вы-

числению одного определителя второго порядка. Действительно, вычитая из второй и третьей строк данного определителя первую строку, получаем

$$\Delta_4 = 10 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 10 \cdot 7 \cdot 13 = 910. \quad \blacktriangleleft$$

2. *Приведение определителя к треугольному виду.* Определитель, у которого все элементы, находящиеся выше или ниже главной диагонали, равны нулю, называется *определителем треугольного вида*. Очевидно, что в этом случае определитель равен произведению элементов его главной диагонали. Приведение любого определителя Δ_n к треугольному виду всегда возможно.

Пример 2. Вычислить определитель

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 7 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 9 & 27 & 6 & 10 & -9 \\ 3 & 9 & 6 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}.$$

► Выполним следующие операции. Пятый столбец определителя сложим с первым, этот же столбец, умноженный на 3, — со вторым, на 2 — с третьим, на 8 — с четвертым столбцом. В итоге получим определитель треугольного вида, который равен исходному:

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & -12 & -2 \\ 0 & 7 & 4 & 11 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -62 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 22 = -5544. \quad \blacktriangleleft$$

Приведение определителей к треугольному виду будет использоваться в дальнейшем при решении систем линейных уравнений методом Жордана — Гаусса (его называют также методом Гаусса).

А3-1.1

1. С помощью правила треугольников (правила Саррюса) вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

(Ответ: а) -36 ; б) 0 ; в) 87 .)

2. Методом понижения порядка вычислить определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 15 & 325 & 15 & 323 & 37 & 527 \\ 23 & 735 & 23 & 735 & 17 & 417 \\ 23 & 737 & 23 & 737 & 17 & 418 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

(Ответ: а) $-22\,198$; б) 16 .)

3. Вычислить определители методом приведения их к треугольному виду:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

(Ответ: а) 48 ; б) 20 .)

4. Вычислить определители, предварительно упростив их:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} x^2 + a^2 & ax & 1 \\ y^2 + a^2 & ay & 1 \\ z^2 + a^2 & az & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 7 & 8 & 5 & 5 & 3 \\ 10 & 11 & 6 & 7 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 2 \\ 7 & 10 & 7 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

(Ответ: а) $a(x-y)(y-z)(x-z)$; б) 5 .)

Самостоятельная работа

Вычислить определители.

$$1. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}; \quad 2. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

(Ответ: 54 .)

(Ответ: 160 .)

$$3. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}. \quad (\text{Ответ: } -27.)$$

1.2. МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Прямоугольная таблица, составленная из $m \times n$ элементов a_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) некоторого множества, называется *матрицей* и записывается в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Элементы матрицы нумеруются 2 индексами. Первый индекс i элемента a_{ij} обозначает номер строки, а второй j — номер столбца, на пересечении которых находится этот элемент в матрице. Матрицы обычно обозначают прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, \dots . Если у матрицы m строк и n столбцов, то по определению она имеет размерность $m \times n$. В случае необходимости это обозначается следующим образом: $A_{m \times n}$. Матрица называется *числовой*, если ее элементы a_{ij} — числа; *функциональной*, если a_{ij} — функции; *векторной*, если a_{ij} — векторы, и т. д. Матрицы A и B называются *равными*, если все их соответствующие элементы a_{ij} и b_{ij} равны, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$. Следовательно, равными могут быть только матрицы одинаковой размерности. Матрицы, у которых $m = n$, называются *квадратными*. Если $i = 1$, то получаем *матрицу-строку*; если $j = 1$, имеем *матрицу-столбец*. Их также называют *вектор-строкой* и *вектор-столбцом* соответственно.

Перечислим основные операции над матрицами.

1. *Сложение и вычитание матриц*. Эти операции определяются только для матриц одинаковой размерности. *Суммой (разностью) матриц A и B* , обозначаемой $A + B$ ($A - B$), называется матрица C , элементы которой $C_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, где a_{ij} и b_{ij} — соответственно элементы матриц A и B . Например, пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad A - B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{bmatrix}.$$

2. *Умножение матрицы на число*. Произведением матрицы A и числа λ , обозначаемым λA , называется матрица B той же размерности, элементы которой $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, где a_{ij} — элементы матрицы A , т. е. при умножении матрицы на число (числа на матрицу) надо все элементы матрицы умножить на это число. Например, пусть

$$\lambda = -2, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\lambda A = -2 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -14 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Умножение матриц. Произведением матриц $A_{m \times n}$ и $B_{n \times p}$ называется матрица $C_{m \times p} = A \cdot B$ (или проще AB), элементы которой

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}, \text{ где } a_{ik}, b_{kj} \text{ — элементы матриц } A \text{ и } B. \text{ Отсюда следует,}$$

что произведение AB существует только в случае, когда первый множитель A имеет число столбцов, равное числу строк второго множителя B . Далее, число строк матрицы AB равно числу строк A , а число столбцов — числу столбцов B . Из существования произведения AB не следует существование произведения BA . В случае его существования, как правило $BA \neq AB$. Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными* (или *коммутирующими*). Известно, что всегда $(AB)C = A(BC)$.

Пример 1. Найти AB и BA , если:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

► Имеем:

$$AB = C_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix},$$

где $c_{11} = 4(-1) + (-5)(-2) + 8 \cdot 3 = 30$; $c_{12} = 4 \cdot 5 + (-5)(-3) + 8 \cdot 4 = 67$; $c_{21} = 1(-1) + 3(-2) + (-1)3 = -10$; $c_{22} = 1 \cdot 5 + 3(-3) + (-1)4 = -8$.

$$\text{В результате } AB = \begin{bmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{bmatrix}.$$

Далее находим

$$BA = \tilde{C}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{13} \\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} & \tilde{c}_{23} \\ \tilde{c}_{31} & \tilde{c}_{32} & \tilde{c}_{33} \end{bmatrix},$$

где $\tilde{c}_{11} = (-1)4 + 5 \cdot 1 = 1$; $\tilde{c}_{12} = (-1)(-5) + 5 \cdot 3 = 20$; $\tilde{c}_{13} = (-1)8 + 5(-1) = -13$; $\tilde{c}_{21} = (-2)4 + (-3)1 = -11$; $\tilde{c}_{22} = (-2)(-5) + (-3)3 = 1$; $\tilde{c}_{23} = (-2)8 + (-3)(-1) = -13$; $\tilde{c}_{31} = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 16$; $\tilde{c}_{32} = 3(-5) + 4 \cdot 3 = -3$; $\tilde{c}_{33} = 3 \cdot 8 + 4(-1) = 20$. Имеем:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 20 & -13 \\ -11 & 1 & -13 \\ 16 & -3 & 20 \end{bmatrix}.$$

Итак, $AB \neq BA$. ◀

Пример 2. Даны матрицы: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Найти

AB и BA .

► Имеем:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 5(-1) & 3(-5) + 5 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 2(-1) & 1(-5) + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + (-5)1 & 1 \cdot 5 + (-5)2 \\ (-1)3 + 2 \cdot 1 & (-1)5 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $AB = BA$. ◀

Пример 3. Найти $(AB)C$ и $A(BC)$, если:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

► Имеем:

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -1 & 9 & -2 \\ 9 & 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad (AB)C = \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{bmatrix},$$

$$BC = \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A(BC) = \begin{bmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{bmatrix},$$

т. е. $(AB)C = A(BC)$. ◀

А3-1.2

1. Даны матрицы A и B . Найти: $A + B$, $2A$, $A - 3B$, если:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 11 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Даны матрицы A и B . Найти AB и BA , если:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = [5 \quad -2 \quad 3];$$

$$\text{г) } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\text{д) } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\text{Ответ: а) } AB = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 0 & -11 & 19 \\ 13 & 13 & 29 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 30 \\ -13 & -2 & -8 \\ 21 & 3 & 18 \end{bmatrix}; \right.$$

$$\text{б) } AB = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 2 & 17 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 21 & -7 & 35 \\ 15 & -1 & 20 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } BA = [13], AB = \begin{bmatrix} 15 & -6 & 9 \\ 20 & -8 & 12 \\ 10 & -4 & 6 \end{bmatrix};$$

$$\text{г) } AB = BA = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ 7 & 10 \end{bmatrix};$$

$$\text{д) } AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.)$$

3. Для матрицы A найти все перестановочные (коммутирующие) с ней квадратные матрицы B . Проверить выполнимость равенства $AB = BA$, если:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \text{ б) } A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(Ответ: а) $B = \begin{bmatrix} 3b & -b \\ b & 2b \end{bmatrix}$; б) $B = \begin{bmatrix} a+b & 5a \\ a & b \end{bmatrix}$, где a, b — любые числа (параметры).)

4. Даны матрицы A, B и C . Найти $A(BC), (AB)C$ и показать, что $(AB)C = A(BC)$, если:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -6 \\ 7 & -8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ -2 & -30 \end{bmatrix};$$

$$6) A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 & -7 \\ 8 & 3 & 11 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix},$$

$$C = [-1 \ 9 \ 3 \ 6].$$

$$\left(\text{Ответ: а) } ABC = \begin{bmatrix} 43 & 96 \\ 18 & 758 \\ 28 & 1030 \end{bmatrix}; \right.$$

$$6) ABC = \begin{bmatrix} 52 & -468 & -156 & -312 \\ -19 & 171 & 57 & 114 \end{bmatrix} \left. \right)$$

Самостоятельная работа

1. Даны матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найти те из произведений AB , BA , AC , CA , BC , CB , которые имеют смысл.

$$\left(\text{Ответ: } BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}, AC = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

2. Для данных матриц A и B найти $(A + 3B)^2$, если:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ -3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\text{Ответ: } \begin{bmatrix} 96 & 12 & 8 \\ -18 & 54 & -8 \\ 51 & 85 & 111 \end{bmatrix} \right)$$

3. Найти $(AB)C$ и $A(BC)$, если:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\text{Ответ: } \begin{bmatrix} -11 & 100 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

1.3. ОБРАТНЫЕ МАТРИЦЫ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. РАНГ МАТРИЦЫ. ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА — КАПЕЛЛИ

Квадратная матрица порядка n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

называется *невырожденной*, если ее определитель (детерминант)

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.9)$$

В случае, когда $\det A = 0$, матрица A называется *вырожденной*.

Только для квадратных невырожденных матриц A вводится понятие обратной матрицы A^{-1} . Матрица A^{-1} называется *обратной для квадратной невырожденной матрицы A* , если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E — единичная матрица порядка n :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.10)$$

Известно, что для A существует единственная обратная матрица A^{-1} , которая определяется формулой

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}, \quad A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Матрица A^* называется *присоединенной*, ее элементами являются алгебраические дополнения A_{ij} транспонированной матрицы A^T , т. е. матрицы, полученной из данной матрицы A заменой ее строк столбцами с теми же номерами:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Пример 1. Дана матрица A . Убедиться, что она невырожденная, найти обратную ей матрицу A^{-1} и проверить выполнимость равенств $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, если:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

► а) Имеем $\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Далее находим алгебраические дополнения: $A_{11} = 3$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = -1$. Следовательно,

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{bmatrix}, \quad AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}A;$$

б) Вычисляем $\det A = -8 \neq 0$ и алгебраические дополнения $A_{11} = -2$, $A_{12} = 2$, $A_{13} = 4$, $A_{21} = 3$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = -2$, $A_{31} = -7$, $A_{32} = -5$, $A_{33} = -6$. Тогда

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}, \quad AA^{-1} = A^{-1}A = E. \quad \blacktriangleleft$$

Введем понятие ранга матрицы. Выделим в матрице A k строк и k столбцов, где k — число, меньшее или равное меньшему из чисел m и n . Определитель порядка k , составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных k строк и k столбцов, называется *минором* или *определителем, порожденным матрицей* A . Например, для матрицы

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 8 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

при $k = 2$ определители

$$\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}$$

будут порожденными данной матрицей.

Рангом матрицы A (обозначается $\text{rang } A$) называется наибольший порядок порожденных ею определителей, отличных от нуля. Если равны нулю все определители порядка k , порожденные данной матрицей A , то $\text{rang } A < k$.

Теорема 1. Ранг матрицы не изменится, если:

- 1) поменять местами любые два параллельных ряда;
- 2) умножить каждый элемент ряда на один и тот же множитель $\lambda \neq 0$;
- 3) прибавить к элементам ряда соответствующие элементы любого другого параллельного ряда, умноженные на один и тот же множитель.

Преобразования 1—3 называются *элементарными*. Две матрицы называются *эквивалентными*, если одна матрица получается из другой с помощью элементарных преобразований. Эквивалентность матриц A и B обозначается $A \sim B$.

Базисным минором матрицы называется всякий отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу данной матрицы.

Рассмотрим основные методы нахождения ранга матрицы.

1. *Метод единиц и нулей.* С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к виду, когда каждый ее ряд будет состоять только из нулей или из нулей и одной единицы. Тогда число оставшихся единиц и определит ранг исходной матрицы, так как полученная матрица будет эквивалентна исходной.

Пример 2. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{bmatrix}.$$

► Умножим третий столбец матрицы A на $1/2$. Далее, полученную первую строку умножим на 2 и вычтем ее из четвертой строки. Теперь третий столбец содержит три нуля и единицу (в первой строке). Легко делаем нули в первой строке на первой, второй, четвертой и пятой позициях. Имеем

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Теперь четвертую строку последней матрицы складываем со второй и третьей, получая при этом еще два нуля во втором столбце, после чего делаем нули в четвертой строке всюду, кроме единицы на пересечении четвертой строки и второго столбца. В результате этих элементарных преобразований имеем:

$$A \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Получили три единицы. Следовательно, $\text{rang } A = 3$.

За базисный минор можно взять, например, определитель третьего порядка, который находится на пересечении первой, третьей, четвертой строк и второго, третьего и четвертого столбцов (на пересечении этих строк и столбцов в последней матрице стоят единицы). Так как перестановка рядов матрицы не производилась, то один из базисных миноров матрицы A следующий:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} \neq 0. \blacktriangleleft$$

2. Метод окаймляющих миноров. Минор M_{k+1} порядка $k+1$, содержащий в себе минор M_k порядка k , называется *окаймляющим* минор M_k . Если у матрицы A существует минор $M_k \neq 0$, а все окаймляющие его миноры $M_{k+1} = 0$, то $\text{rang } A = k$.

Пример 3. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -9 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

► Имеем $M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$. Для M_2 окаймляющими будут только два минора:

а также сложим второй столбец с четвертым. В результате в третьей строке получим все нули, кроме единицы во втором столбце. Тогда легко можно обратить в нули все остальные элементы второго столбца. Получим

$$B \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -5 & 0 & -3 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -2 & 5 & 3 \end{array} \right]$$

Теперь вторую строку прибавим к первой и четвертой, а затем в полученной матрице первый столбец сложим с четвертым. Имеем:

$$B \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

Далее третий столбец последней матрицы вычтем из четвертого, равного ему, и прибавим к первому. Полученный первый столбец, умноженный на 5, вычтем из пятого. Тогда

$$B \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 0 & -44 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Получили $\text{rang } A = 3$, $\text{rang } B = 4$, откуда $\text{rang } A \neq \text{rang } B$, т. е. исходная система уравнений несовместна. ◀

А3-1.3

1. Найти матрицу A^{-1} , обратную данной матрице A , если:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Ответ: а) } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -10 & -9 & 14 \\ 13 & 12 & -17 \\ -4 & -3 & 5 \end{bmatrix}; \\ \text{б) } A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -7 & 3 & -13 & 41 \\ -13 & -3 & 8 & -16 \\ 18 & 3 & -3 & 6 \\ -3 & -3 & 3 & -6 \end{bmatrix} \end{array} \right)$$

2. Найти ранг матрицы A с помощью элементарных

преобразований или методом окаймляющих миноров и указать какой-либо базисный минор, если:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

(Ответ: а) 2; б) 2; в) 3.)

3. Зная основную матрицу A и расширенную матрицу B , записать соответствующую им систему линейных алгебраических уравнений и решить вопрос о ее совместности или несовместности, пользуясь теоремой Кронекера — Капелли:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & -5 & 8 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \left[A \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right. \right];$$

$$\text{б) } A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \left[A \left| \begin{array}{c} 6 \\ 12 \\ -6 \\ 3 \\ 9 \end{array} \right. \right].$$

(Ответ: а) $\text{rang } A = 2, \text{ rang } B = 3$, т. е. система несовместна; б) $\text{rang } A = \text{rang } B = 3$, т. е. система совместна.)

Самостоятельная работа

1. 1) Найти матрицу A^{-1} , обратную матрице

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{bmatrix};$$

2) найти ранг матрицы A с помощью элементарных преобразований и указать какой-либо ее базисный минор, если

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \\ 15 & 7 & 11 \\ 11 & 5 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\text{Ответ: 1) } A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{bmatrix}; \text{ 2) } \text{rang } A = 2. \right)$$

2. 1) Для матрицы A найти матрицу A^{-1} и убедиться, что $AA^{-1} = E$, если

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix};$$

2) найти ранг матрицы A и указать какой-либо ее базисный минор, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\text{Ответ: 1) } A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \text{ 2) } \text{rang } A = 2. \right)$$

3. 1) Найти матрицу A^{-1} , если

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix};$$

2) найти ранг матрицы A и указать какой-либо ее базисный минор, если

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\text{Ответ: 1) } A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 4 \end{bmatrix}; \text{ 2) } \text{rang } A = 3. \right)$$

1.4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Матричный метод. Пусть для системы (1.13) $m = n$ и основная матрица A вида (1.14) — невырожденная, т. е. $\det A \neq 0$. Тогда для A существует единственная обратная матрица A^{-1} , определяемая формулой (1.11). Введем в рассмотрение матрицы-столбцы для неизвестных и свободных членов:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

Тогда систему (1.13) можно записать в матричной форме: $AX = \vec{B}$. Умножив это матричное уравнение слева на A^{-1} , получим $A^{-1}AX = A^{-1}\vec{B}$, откуда $EX = X = A^{-1}\vec{B}$. Следовательно, матрица-решение X легко находится как произведение A^{-1} и \vec{B} .

Пример 1. Решить систему уравнений матричным методом:

$$\left. \begin{aligned} 2x - 4y + z &= 3, \\ x - 5y + 3z &= -1, \\ x - y + z &= 1. \end{aligned} \right\}$$

► Имеем:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \det A = -8.$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

(см. пример 2 из § 1.3). Находим:

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 \cdot 3 + 3(-1) - 7 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 1(-1) - 5 \cdot 1 \\ 4 \cdot 3 - 2(-1) - 6 \cdot 1 \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} -16 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

т. е. $x = 2, y = 0, z = -1$ — решение данной системы. ◀

Формулы Крамера. Если для системы (1.13) $m = n$ и $\det A \neq 0$, то верны *формулы Крамера* для вычисления неизвестных x_i ($i = \overline{1, n}$):

$$x_i = \Delta_n^{(i)} / \Delta_n \quad (i = \overline{1, n}), \quad (1.17)$$

где $\Delta_n = \det A$, а $\Delta_n^{(i)}$ являются определителями n -го порядка, которые получаются из Δ_n путем замены в нем i -го столбца столбцом свободных членов исходной системы.

Пример 2. Решить систему уравнений с помощью формул Крамера:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= -8, \\ 2x_2 + 7x_3 &= 17. \end{aligned} \right\}$$

► Вычислим

$$\Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 18 + 20 + 21 = 79.$$

Последовательно заменив в Δ_3 первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим:

$$\Delta_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 395, \quad x_1 = \frac{\Delta_3^{(1)}}{\Delta_3} = \frac{395}{79} = 5,$$

$$\Delta_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = -158, \quad x_2 = \frac{\Delta_3^{(2)}}{\Delta_3} = -\frac{158}{79} = -2,$$

$$\Delta_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 237, \quad x_3 = \frac{\Delta_3^{(3)}}{\Delta_3} = \frac{237}{79} = 3. \quad \blacktriangleleft$$

Метод последовательных исключений Жордана — Гаусса. Если основная матрица A системы (1.13) имеет ранг $r \leq n$, то расширенная матрица B этой системы с помощью элементарных преобразований строк и перестановок столбцов всегда может быть приведена к виду

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1r} & \tilde{a}_{1r+1} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \dots & \tilde{a}_{2r} & \tilde{a}_{2r+1} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{rr+1} & \dots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_m \end{array} \right]. \quad (1.18)$$

Матрица (1.18) является расширенной матрицей системы

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \dots + \tilde{a}_{1r}x_r + \tilde{a}_{1r+1}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n &= \tilde{b}_1, \\ x_2 + \dots + \tilde{a}_{2r}x_r + \tilde{a}_{2r+1}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n &= \tilde{b}_2, \\ \dots & \dots \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_r + \tilde{a}_{rr+1}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{rn}x_n = \tilde{b}_r, \\ 0 = \tilde{b}_{r+1}, \\ \dots \dots \dots \\ 0 = \tilde{b}_m, \end{array} \right\} (1.19)$$

которая эквивалентна исходной системе (т. е. имеет те же самые решения, что и исходная система). Если хотя бы одно из чисел $\tilde{b}_{r+1}, \dots, \tilde{b}_m$ отлично от нуля, то система (1.19) и, следовательно, исходная система (1.13) несовместны. Если же $\tilde{b}_{r+1} = \dots = \tilde{b}_m = 0$, то система (1.13) совместна, а из системы (1.19) можно последовательно выразить в явном виде базисные неизвестные $x_r, x_{r-1}, \dots, x_2, x_1$ через свободные неизвестные x_{r+1}, \dots, x_n , т. е. решить систему (1.13). Если $r = n$, то решение этой системы единственно.

Пример 3. С помощью метода последовательных исключений Жордана — Гаусса решить вопрос о совместности данной системы и в случае совместности решить ее:

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{array} \right\}$$

► Составим расширенную матрицу B и проведем необходимые элементарные преобразования строк:

$$\begin{aligned}
 B &= \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \end{array} \right] \sim \\
 &\sim -\frac{1}{2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array} \right] \sim \\
 &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Последней матрице соответствует система, эквивалентная исходной:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - x_4 = 2, \\ x_4 = -1. \end{array} \right\}$$

Из нее, двигаясь снизу вверх, последовательно находим: $x_4 = -1$, $x_3 = 2 + x_4 = 2 - 1 = 1$, $x_2 = -x_3 - x_4 = -1 + 1 = 0$, $x_1 = 1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 1 - 5 + 2 = -2$.

Итак, система совместна, ее решение единственно ($r = n = 4$): $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. Проверкой легко убедиться в правильности найденного решения. ◀

Пример 4. Методом Жордана — Гаусса показать, что данная система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от двух параметров, и найти эти решения:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 3, \\ x_1 + x_2 &= 2. \end{aligned} \right\}$$

► Составляем расширенную матрицу системы B и находим $\text{rang } A$ и $\text{rang } B$ с помощью элементарных преобразований строк:

$$\begin{aligned} B = [A|\vec{b}] &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, $\text{rang } A = \text{rang } B = 2 < n = 4$. Поэтому система совместна и имеет бесчисленное множество решений, зависящих от двух ($n - r = 4 - 2 = 2$) параметров.

Последней матрице, эквивалентной данной матрице B , соответствует система уравнений

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 3, \end{aligned} \right\}$$

эквивалентная исходной. Так как $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, то в качестве базисных неизвестных берем x_1 и x_2 , а x_3 и x_4 принимаем за свободные неизвестные (параметры). Тогда из второго уравнения последней системы имеем $x_2 = 3 - x_3 - x_4$. Подставив выражение для x_2 в первое уравнение, найдем

$$x_1 = 5 - 2(3 - x_3 - x_4) - x_3 - x_4 = -1 + x_3 + x_4. \quad \blacktriangleleft$$

З а м е ч а н и е. За базисные неизвестные можно было бы принять также x_1, x_3 , или x_1, x_4 , или x_2, x_3 , или x_2, x_4 , но не x_3, x_4 , так как определитель, составленный из коэффициентов при x_3 и x_4 , равен нулю ($\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$), и поэтому x_3 и x_4 невозможно выразить через x_1 и x_2 .

А3-1.4

1. Доказать совместность систем с помощью теоремы Кронекера — Капелли, записать системы в матричной форме и решить их матричным способом:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ x_2 + x_3 = -2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$$

(Ответ: а) $x_1 = x_2 = x_3 = -1$; б) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$.)

2. Решить системы уравнений, используя формулы Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 + 4x_3 = -6, \\ x_1 + x_3 = 1; \end{cases} \text{ б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 8x_4 = 0, \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_4 = -24. \end{cases}$$

(Ответ: а) $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 0$; б) $x_1 = -19, x_2 = 26, x_3 = 11, x_4 = -5$.)

3. Решить системы методом Жордана — Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1. \end{cases}$$

(Ответ: а) $x_1 = 14t, x_2 = 21t, x_3 = x_4 = t$ (t — любое число); б) $x_1 = -10t + 10, x_2 = t, x_3 = -16t + 15, x_4 = 4 - 5t$ (t — любое число).)

4. Исследовать систему уравнений на совместность и в случае совместности решить ее:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12. \end{aligned} \right\}$$

(Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$.)

5. Решить однородную систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

(Ответ: $x_1 = 8x_3 - 7x_4, x_2 = -6x_3 + 5x_4$.)

Самостоятельная работа

1. Решить систему уравнений матричным способом и сделать проверку:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 5x_3 &= 4, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 0, \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 &= 2. \end{aligned} \right\}$$

2. Решить систему по формулам Крамера и сделать проверку:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &= -2, \\ 2x_1 - x_2 &= -1, \\ x_2 + x_3 &= -2. \end{aligned} \right\}$$

3. Решить систему методом Жордана — Гаусса и сделать проверку:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= -22, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 12, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

1.5. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 1

ИДЗ-1.1

1. Для данного определителя Δ найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{i2} , a_{3j} . Вычислить определитель Δ : а) разложив его по элементам i -й строки; б) разложив его по элементам j -го столбца; в) получив предварительно нули в i -й строке.

$$1.1. \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix},$$

$$i=4, j=1.$$

$$1.2. \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix},$$

$$i=3, j=3.$$

$$1.3. \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix},$$

$$i=4, j=1.$$

$$1.4. \begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix},$$

$$i=1, j=3.$$

$$1.5. \begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix},$$

$$i=2, j=4.$$

$$1.6. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix},$$

$$i=1, j=2.$$

$$1.7. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix},$$

$$i=2, j=3.$$

$$1.8. \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix},$$

$$i=3, j=1.$$

$$1.9. \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}, \quad 1.10. \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix},$$

$i=4, j=3.$ $i=4, j=2.$

$$1.11. \begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}, \quad 1.12. \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix},$$

$i=3, j=4.$ $i=1, j=2.$

$$1.13. \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}, \quad 1.14. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix},$$

$i=1, j=4.$ $i=2, j=4.$

$$1.15. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad 1.16. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

$i=1, j=3.$ $i=3, j=2.$

$$1.17. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 1.18. \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$i=3, j=1.$ $i=2, j=4.$

$$1.19. \begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}, \quad 1.20. \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix},$$

$i=2, j=3.$ $i=4, j=3.$

$$1.21. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}, \quad 1.22. \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix},$$

$i=1, j=2.$ $i=3, j=2.$

$$1.23. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad 1.24. \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix},$$

$i=4, j=4.$ $i=3, j=2.$

$$1.25. \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad 1.26. \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

$i=2, j=3.$ $i=4, j=1.$

$$1.27. \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}, \quad 1.28. \begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

$i=3, j=4.$ $i=1, j=2.$

$$1.29. \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad 1.30. \begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix},$$

$i=4, j=4.$ $i=2, j=2.$

2. Даны две матрицы A и B . Найти: а) AB ; б) BA ; в) A^{-1} ; г) AA^{-1} ; д) $A^{-1}A$.

$$2.1. A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2.2. A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$2.3. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$2.4. A = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.5. A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2.6. A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$2.7. A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$2.8. A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.9. A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.10. A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$2.11. A = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.12. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$2.13. A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$2.14. A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$2.15. A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$2.16. A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.17. A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2.18. A = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.19. A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}.$$

$$2.20. A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.21. A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2.22. A = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.23. A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.24. A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 7 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

$$2.25. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$2.26. A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.27. A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$2.28. A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.29. A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$2.30. A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение типового варианта

1. Для данного определителя

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{12} , a_{32} . Вычислить определитель Δ_4 : а) разложив его по элементам первой строки; б) разложив его по элементам второго столбца; в) получив предварительно нули в первой строке.

► Находим:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 16 + 6 + 12 + \\ + 4 - 16 = -18,$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -12 + 12 - 12 - 8 = -20.$$

Алгебраические дополнения элементов a_{12} и a_{32} соответственно равны:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -(-18) = 18,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -(-20) = 20.$$

а) Вычислим

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} = \\ &= -3 \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= -3(8 + 2 + 4 - 4) - 2(-8 - 16 + 6 + 12 + 4 - 16) + \\ &\quad + (16 - 12 - 4 + 32) = 38; \end{aligned}$$

б) Разложим определитель по элементам второго столбца:

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -2(-8 + 6 - 16 + 12 + 4 - 16) - 2(12 + 6 - \\ &\quad - 6 - 16) + (-6 + 16 - 12 - 4) = 38; \end{aligned}$$

в) Вычислим Δ_4 , получив предварительно нули в первой строке. Используем свойство 10 определителей (см. § 1.1). Умножим третий столбец определителя на 3 и прибавим к первому, затем умножим на -2 и прибавим ко второму. Тогда в первой строке все элементы, кроме одного, будут нулями. Разложим полученный таким образом определитель по элементам первой строки и вычислим его:

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -14 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= -(-56 + 18) = 38. \end{aligned}$$

В определителе третьего порядка получили нули в первом столбце по свойству 10 определителей. ◀

2. Даны две матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найти: а) AB ; б) BA ; в) A^{-1} ; г) AA^{-1} ; д) $A^{-1}A$.

► а) Произведение AB имеет смысл, так как число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . Находим матрицу $C = AB$, элементы которой $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj}$. Имеем:

$$\begin{aligned} C = AB &= \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -4+0-2 & -8+0+1 & 12+0+3 \\ 2-2-6 & 4+0+3 & -6-1+9 \\ 3+4-4 & 6+0+2 & -9+2+6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -6 & -7 & 15 \\ -6 & 7 & 2 \\ 3 & 8 & -1 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

б) Вычислим

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -4+4-9 & 0-2-6 & 1+6-6 \\ -8+0+3 & 0+0+2 & 2+0+2 \\ 8+2+9 & 0-1+6 & -2+3+6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -9 & -8 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 19 & 5 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Очевидно, что $AB \neq BA$;

в) Обратная матрица A^{-1} матрицы A имеет вид (см. формулу (1.11))

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix},$$

где

$$\det A = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 4 + 3 + 24 = 39 \neq 0,$$

т. е. матрица A — невырожденная, и, значит, существует матрица A^{-1} . Находим:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 14,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4.$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{39} \begin{bmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{39} & -\frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ -\frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{bmatrix};$$

г) Имеем:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39} \\ -\frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39} \\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E;$$

д) Имеем:

$$A^{-1}A = \frac{1}{39} \begin{bmatrix} -8 & 2 & 1 \\ 5 & -11 & 14 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

т. е. обратная матрица найдена верно. ◀

ИДЗ-1.2

1. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

$$1.1. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases} \quad 1.2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

$$1.3. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases} \quad 1.4. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$$

$$1.5. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$$

$$1.6. \begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$$

$$1.7. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$$

$$1.8. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = 39. \end{cases}$$

$$1.9. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33, \\ 4x_1 + x_3 = -7. \end{cases}$$

$$1.10. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ 5x_2 + 4x_3 = -20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22. \end{cases}$$

$$1.11. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

$$1.12. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

$$1.13. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases} \quad 1.14. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

$$1.15. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases}$$

$$1.16. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$$

$$1.17. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

$$1.18. \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$$

$$1.19. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$$

$$1.20. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$$

$$1.21. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$$

$$1.22. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$1.23. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

$$1.24. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$$

$$1.25. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

$$1.26. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

$$1.27. \begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_3 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19. \end{cases}$$

$$1.28. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

$$1.29. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_2 - 7x_3 = -6. \end{cases}$$

$$1.30. \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$$

2. Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

$$2.1. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \quad 2.2. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_3 = -2. \end{cases}$$

$$2.3. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\ 5x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases} \quad 2.4. \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = 5. \end{cases}$$

$$2.5. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 2. \end{cases} \quad 2.6. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 1. \end{cases}$$

$$2.7. \begin{cases} 4x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases} \quad 2.8. \begin{cases} 5x_1 - 9x_2 - 4x_3 = 6, \\ x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

$$2.9. \begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 4x_1 - 3x_2 = 1. \end{cases} \quad 2.10. \begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 1, \\ 4x_1 - 4x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$$

$$2.11. \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases} \quad 2.12. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

$$2.13. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases} \quad 2.14. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 9x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

$$2.15. \begin{cases} 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases} \quad 2.16. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 6, \\ 3x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0. \end{cases}$$

$$2.17. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1, \\ 7x_1 - 9x_2 - x_3 = 3, \\ 5x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases} \quad 2.18. \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 9, \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$2.19. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$2.20. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases} \quad 2.21. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 4. \end{cases}$$

$$2.22. \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 - 9x_2 - 8x_3 = 1. \end{cases} \quad 2.23. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

$$2.24. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases} \quad 2.25. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

$$2.26. \begin{cases} 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases} \quad 2.27. \begin{cases} 2x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 0, \\ 2x_1 - 5x_2 + 6x_3 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$

$$2.28. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases} \quad 2.29. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$$

$$2.30. \begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 5x_3 = 1, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 11, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

3. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

$$3.1. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases} \quad 3.2. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.3. \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases} \quad 3.4. \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 10x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.5. \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases} \quad 3.6. \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.7. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_3 = 0. \end{cases} \quad 3.8. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.9. \begin{cases} 5x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 0. \end{cases} \quad 3.10. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.11. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases} \quad 3.12. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.13. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \quad 3.14. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.15. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases} \quad 3.16. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.17. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases} \quad 3.18. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.19. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.20. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.21. \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.22. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.23. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.24. \begin{cases} 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.25. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.26. \begin{cases} 7x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.27. \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.28. \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.29. \begin{cases} 8x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.30. \begin{cases} x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений.

$$4.1. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.2. \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.3. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.4. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.5. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.6. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.7. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.8. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.9. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.10. \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
4.11. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases} & 4.12. \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \\
4.13. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 9x_3 = 0. \end{cases} & 4.14. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases} \\
4.15. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases} & 4.16. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \\
4.17. \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases} & 4.18. \begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases} \\
4.19. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases} & 4.20. \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \\
4.21. \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases} & 4.22. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \\
4.23. \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases} & 4.24. \begin{cases} 7x_1 - 6x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases} \\
4.25. \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases} & 4.26. \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \\
4.27. \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases} & 4.28. \begin{cases} 5x_1 + x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \\
4.29. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 7x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases} & 4.30. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}
\end{array}$$

Решение типового варианта

1. Дана система линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7. \end{array} \right\}$$

Проверить, совместна ли эта система, и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

► Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера — Капелли. С помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

данной системы и ранг расширенной матрицы

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array} \right].$$

Для этого умножим первую строку матрицы B на -2 и сложим со второй, затем умножим первую строку на -3 и сложим с третьей, поменяем местами второй и третий столбцы. Получим

$$\begin{aligned} B &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -16 & -16 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Следовательно, $\text{rang } A = \text{rang } B = 3$ (т. е. числу неизвестных). Значит, исходная система совместна и имеет единственное решение.

а) По формулам Крамера (1.17)

$$x_1 = \Delta_3^{(1)}/\Delta_3, \quad x_2 = \Delta_3^{(2)}/\Delta_3, \quad x_3 = \Delta_3^{(3)}/\Delta_3,$$

где

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 64;$$

$$\Delta_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 32,$$

находим: $x_1 = 64/(-16) = -4$, $x_2 = -16/(-16) = 1$,
 $x_3 = 32/(-16) = -2$;

б) Для нахождения решения системы с помощью обратной матрицы запишем систему уравнений в матричной форме $Ax = \vec{B}$. Решение системы в матричной форме имеет вид $x = A^{-1}\vec{B}$. По формуле (1.11) находим обратную матрицу A^{-1} (она существует, так как $\Delta_3 = \det A = -16 \neq 0$):

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -15, \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 16,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 16,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{bmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{bmatrix}.$$

Решение системы:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-16} \begin{bmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-45 + 32 + 77)/(-16) \\ (-9 - 7)/(-16) \\ (-42 + 32 + 42)/(-16) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Итак, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$;

в) Решим систему методом Гаусса. Исключим x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого первое уравнение умножим на 2 и вычтем из второго, затем первое уравнение умножим на 3 и вычтем из третьего:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ -6x_2 - x_3 = -4, \\ -16x_2 = -16. \end{array} \right\}$$

Из полученной системы находим $x_1 = -4$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$. ◀

2. Дана система линейных неоднородных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4. \end{array} \right\}$$

Проверить, совместна ли эта система, и в случае совместности решить ее: а) по формулам Крамера; б) с помощью обратной матрицы (матричным методом); в) методом Гаусса.

► Проверяем совместность системы с помощью теоремы Кронекера — Капелли. В расширенной матрице

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array} \right]$$

меняем третий и первый столбцы местами, умножаем первую строку на 3 и прибавляем ко второй, умножаем первую строку на 2 и прибавляем к третьей, из второй строки вычитаем третью:

$$\begin{aligned} B &= \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & -2 & 5 & 4 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & 7 \\ 0 & -8 & 9 & 8 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -8 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Теперь ясно, что $\text{rang } A = 2$, $\text{rang } B = 3$. Согласно теореме Кронекера — Капелли, из того, что $\text{rang } A \neq \text{rang } B$, следует несовместность исходной системы. ◀

3. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

► Определитель системы

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 11 \neq 0,$$

поэтому система имеет единственное нулевое решение: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. ◀

4. Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

► Так как

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

то система имеет бесчисленное множество решений. Поскольку $\text{rang } A = 2$, $n = 3$, возьмем любые два уравнения системы (например, первое и второе) и найдем ее решение. Имеем:

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Так как определитель из коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2 не равен нулю, то в качестве базисных неизвестных возьмем x_1 и x_2 (хотя можно брать и другие пары неизвестных) и переместим члены с x_3 в правые части уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= x_3, \\ x_1 - 3x_2 &= -5x_3. \end{aligned} \right\}$$

Решаем последнюю систему по формулам Крамера (1.17):

$$x_1 = \Delta_2^{(1)}/\Delta_2, \quad x_2 = \Delta_2^{(2)}/\Delta_2,$$

где

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13;$$

$$\Delta_2^{(1)} = \begin{vmatrix} x_3 & 4 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = -3x_3 + 20x_3 = 17x_3;$$

$$\Delta_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -5x_3 \end{vmatrix} = -16x_3.$$

Отсюда находим, что $x_1 = -17x_3/13$, $x_2 = 16x_3/13$. Полагая $x_3 = 13k$, где k — произвольный коэффициент пропорциональности, получаем решение исходной системы: $x_1 = -17k$, $x_2 = 16k$, $x_3 = 13k$. ◀

1.6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 1

1. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

2. Вычислить определитель n -го порядка:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1+a & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+a & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1+a \end{vmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix};$$

7. Решить систему матричных уравнений

$$\left. \begin{aligned} X + Y &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ 2X + 3Y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\}$$

$$\left(\text{Ответ: } X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \right)$$

8. Установить число линейно независимых уравнений в данной системе и найти ее общее решение:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 - 4x_5 &= 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_5 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

(Ответ: $x_1 = x_3 + x_4 + 2x_5$, $x_2 = x_4$.)

9. Привести к каноническому виду уравнение линии $x^2 + y^2 + 3xy + x + 4y = 0$ и указать соответствующее

преобразование системы координат. (Ответ: $-\frac{5}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 = 1$, $x = -2 + \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$, $y = 1 + \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$.)

10. Убедиться, что линия, определяемая уравнением $9x^2 - 6xy + y^2 - x - 2y - 14 = 0$, является параболой.

11. Доказать справедливость равенства

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{tg} \alpha & \operatorname{tg} \beta & \operatorname{tg} \gamma \\ \operatorname{tg}^2 \alpha & \operatorname{tg}^2 \beta & \operatorname{tg}^2 \gamma \end{array} \right| = \frac{\sin(\alpha - \beta) \sin(\beta - \gamma) \sin(\gamma - \alpha)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \cos^2 \gamma}.$$

12. Решить уравнения:

$$\text{а) } \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{array} \right| = 0; \quad \text{б) } \left| \begin{array}{ccc} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x + 10 & 1 & 1 \end{array} \right| = 0.$$

(Ответ: а) $x = -3$; б) $x_1 = -10$, $x_2 = 2$.)

13. Решить неравенства:

$$\text{а) } \left| \begin{array}{ccc} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{array} \right| < 1; \quad \text{б) } \left| \begin{array}{ccc} 2 & x + 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{array} \right| > 0.$$

(Ответ: а) $x > 3,5$; б) $-6 < x < -4$.)

14. Доказать, что если система уравнений

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z + d_3 &= 0, \\ a_4x + b_4y + c_4z + d_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

совместна, то

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

15. Исследовать данную систему уравнений и найти ее общее решение в зависимости от значения параметра λ :

$$\left. \begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 1, \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 &= 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= \lambda. \end{aligned} \right\}$$

(Ответ: при $\lambda \neq 0$ система несовместна; при $\lambda = 0$ система совместна и ее общее решение: $x_1 = (-5x_3 - 13x_4 - 3)/2$, $x_2 = (-7x_3 - 19x_4 - 7)/2$.)

16. Указать, при каких λ данная система уравнений имеет решения или несовместна:

$$\left. \begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 &= 1. \end{aligned} \right\}$$

(Ответ: если $\lambda = -3$, то система несовместна; если $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq -3$, то $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1/(\lambda + 3)$; если $\lambda = 1$, то решения определяются одним уравнением $\sum_{i=1}^4 x_i = 1$.)

17. Найти решения системы при всех значениях λ :

$$\left. \begin{aligned} \lambda x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

(Ответ: если $(\lambda + 2)(\lambda - 1) \neq 0$, то $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; если $\lambda = -2$, то $x_1 = x_2 = x_3$; если $\lambda = 1$, то решения определяются одним уравнением $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.)

18. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы сумма двух решений системы линейных урав-

нений также была ее решением. (Ответ: однородность системы.)

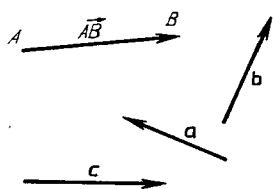
19. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы произведение решения системы линейных уравнений и числа $\lambda \neq 1$ также было ее решением. (Ответ: однородность системы.)

20. При каком условии некоторая линейная комбинация любых решений данной неоднородной системы линейных уравнений будет решением этой системы? (Ответ: сумма коэффициентов линейной комбинации равна 1.)

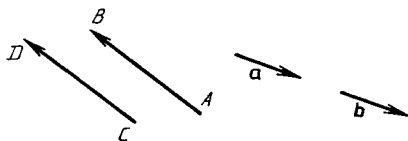
2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. ВЕКТОРЫ. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

Вектором называется направленный отрезок. Если начало вектора находится в точке A , а конец — в точке B , то вектор обозначается \vec{AB} . Если же начало и конец вектора не указываются, то его обозначают строчной буквой латинского алфавита a, b, c, \dots . На рисунке направление вектора изображается стрелкой (рис. 2.1).



Р и с. 2.1



Р и с. 2.2

Через \vec{BA} обозначают вектор, направленный противоположно вектору \vec{AB} . Вектор, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым* и обозначается 0 . Его направление является неопределенным. Другими словами, такому вектору можно приписать любое направление. *Длиной* или *модулем* вектора называется расстояние между его началом и концом. Запись $|\vec{AB}|$ (или AB) и $|a|$ (или a) обозначают модули векторов \vec{AB} и a соответственно.

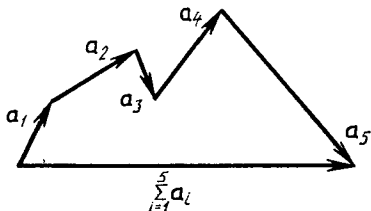
Векторы называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой, и *компланарными*, если они параллельны одной плоскости.

Два вектора называются *равными*, если они коллинеарны, одинаково направлены и равны по длине. На рис. 2.2 изображены пары равных векторов \vec{AB} и \vec{CD} , a и b : $\vec{AB} = \vec{CD}$, $a = b$. Из определения равенства векторов следует, что векторы можно переносить параллельно самим себе, не нарушая их равенства. Такие векторы называются *свободными*.

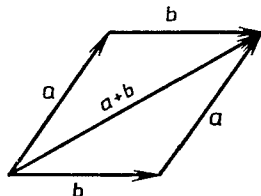
К линейным операциям над векторами относятся: умножение вектора на число и сложение векторов.

Произведением вектора a и числа α называется вектор, обозначаемый αa (или $a\alpha$), модуль которого равен $|\alpha||a|$, а направление совпадает с направлением вектора a , если $\alpha > 0$, и противоположно ему, если $\alpha < 0$.

Суммой векторов a_i ($i = \overline{1, n}$) называется вектор, обозначаемый $a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$, начало которого находится в начале первого вектора a_1 , а конец — в конце последнего вектора a_n ломаной линии, составленной из последовательности слагаемых векторов (рис. 2.3). Это



Р и с. 2.3

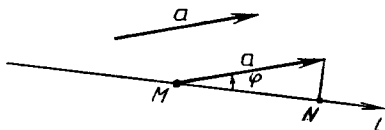


Р и с. 2.4

правило сложения называется *правилом замыкания ломаной*. В случае суммы двух векторов оно равносильно *правилу параллелограмма* (рис. 2.4).

Прямая l с заданным на ней направлением, принимаемым за положительное, называется *осью* l .

Проекцией вектора a на ось l называется число, обозначаемое $pr_l a$ и равное $|a| \cos \varphi$, где φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) — угол между положительным направлением оси l и направлением вектора a , т. е. по определению $pr_l a = |a| \cos \varphi$. Геометрически проекцию вектора a можно охарактеризовать длиной отрезка MN , взятой со знаком «+», если $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, и со знаком «-», если $\pi/2 < \varphi \leq \pi$ (рис. 2.5). При $\varphi = \pi/2$ отрезок MN превращается в точку и $pr_l a = 0$.



Р и с. 2.5

Координатами вектора a называются его проекции на оси координат Ox , Oy , Oz . Они обозначаются соответственно буквами x , y , z . Запись $a = (x, y, z)$ означает, что вектор a имеет координаты x , y , z .

Для равенства векторов необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие координаты были равны. Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Линейной комбинацией векторов a_i называется вектор a , определяемый по формуле $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$, где λ_i — некоторые числа. Если векторы a_i определяются координатами x_i, y_i, z_i , то для координат вектора a

$$a = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i \right).$$

Линейные операции над векторами удовлетворяют свойствам, по форме аналогичным свойствам умножения и сложения чисел. Например,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}, (\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}, \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}, \\ \mathbf{a} + (-1)\mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}, 1\mathbf{a} = \mathbf{a}, 0\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

и т. д.

Если для системы n векторов \mathbf{a}_i равенство

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{a}_i = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

верно только в случае, когда $\lambda_i = 0$, то эта система называется *линейно независимой*. Если же равенство (2.1) выполняется для λ_i , хотя бы одно из которых отлично от нуля, то система векторов \mathbf{a}_i называется *линейно зависимой*. Например, любые коллинеарные векторы, три компланарных вектора, четыре и более векторов в трехмерном пространстве всегда линейно зависимы.

Три упорядоченных линейно независимых вектора $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в пространстве называются *базисом*. Упорядоченная тройка некопланарных векторов всегда образует базис. Любой вектор \mathbf{a} в пространстве можно разложить по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, т. е. представить \mathbf{a} в виде линейной комбинации базисных векторов: $\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$, где x, y, z являются координатами вектора \mathbf{a} в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Базис называется *ортонормированным*, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Обозначают такой базис $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Пример 1. Даны векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (рис. 2.6, а). Изобразить на рисунке их линейную комбинацию $-2\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$.

► Выбираем на плоскости произвольную точку O и откладываем от нее вектор $-2\mathbf{a}$ (рис. 2.6, б). Затем от конца вектора $-2\mathbf{a}$ откладываем

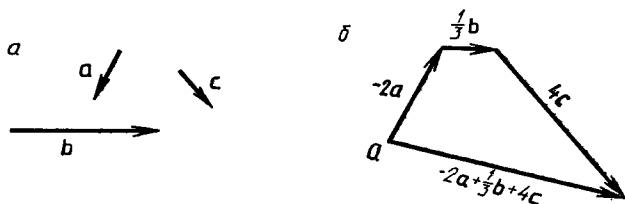


Рис. 2.6

вектор $\frac{1}{3}\mathbf{b}$ и, наконец, строим вектор $4\mathbf{c}$, выходящий из конца вектора $\frac{1}{3}\mathbf{b}$. Искомая линейная комбинация изображается вектором, замыкающим полученную ломаную, начало которого находится в точке O . ◀

Пример 2. Векторы заданы в ортонормированном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ координатами: $\mathbf{a} = (2, -1, 8)$, $\mathbf{e}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{e}_2 = (1, -1, -2)$, $\mathbf{e}_3 = (1, -6, 0)$. Убедиться, что тройка $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ образует базис, и найти координаты вектора \mathbf{a} в этом базисе.

► Если определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -6 & 0 \end{vmatrix},$$

составленный из координат векторов e_1, e_2, e_3 , не равен 0, то векторы e_1, e_2, e_3 линейно независимы и, следовательно, образуют базис. Убеждаемся, что $\Delta = -6 - 4 + 3 - 12 = -19 \neq 0$. Таким образом, тройка e_1, e_2, e_3 — базис.

Обозначим координаты вектора a в базисе e_1, e_2, e_3 через x, y, z . Тогда $a = (x, y, z) = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Так как по условию $a = 2i - j + 8k, e_1 = i + 2j + 3k, e_2 = i - j - 2k, e_3 = i - 6j$, то из равенства $a = xe_1 + ye_2 + ze_3$ следует, что $2i - j + 8k = xi + 2xj + 3xk + yi - yj - 2yk + zi - 6zj = (x + y + z)i + (2x - y - 6z)j + (3x - 2y)k$. Как видно, вектор в левой части полученного равенства равен вектору в правой его части, а это возможно только в случае равенства их соответствующих координат. Отсюда получаем систему для нахождения неизвестных x, y, z :

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 2, \\ 2x - y - 6z &= -1, \\ 3x - 2y &= 8. \end{aligned} \right\}$$

Ее решение: $x = 2, y = -1, z = 1$.

Итак, $a = 2e_1 - e_2 + e_3 = (2, -1, 1)$. ◀

А3-2.1

1. По данным векторам a и b построить следующие их линейные комбинации: а) $2a + b$; б) $a - 3b$; в) $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b$; г) $-3a - \frac{1}{2}b$.

2. Векторы $\overrightarrow{AB} = c, \overrightarrow{BC} = a, \overrightarrow{CA} = b$ служат сторонами треугольника ABC . Выразить через a, b, c векторы $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{CP}$, совпадающие с медианами треугольника ABC . (Ответ: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}a + c$ или $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(c - b)$, $\overrightarrow{BN} = a + \frac{1}{2}b$ или $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(a - c)$, $\overrightarrow{CP} = b + \frac{1}{2}c$ или $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(b - a)$.)

3. В треугольной пирамиде $SABC$ известны векторы $\overrightarrow{SA} = a, \overrightarrow{SB} = b, \overrightarrow{SC} = c$. Найти вектор \overrightarrow{SO} , если точка O является центром масс треугольника ABC . (Ответ: $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}(a + b + c)$.)

4. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, длины оснований AD и BC которой соответственно равны 4 и 2, а угол D равен 45° . Найти проекции векторов \vec{AD} , \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{AC} на ось l , определяемую вектором \vec{CD} . (Ответ: $\text{пр}_l \vec{AD} = 2\sqrt{2}$, $\text{пр}_l \vec{AB} = -\sqrt{2}$, $\text{пр}_l \vec{BC} = \sqrt{2}$, $\text{пр}_l \vec{AC} = 0$.)

5. Вектор \mathbf{a} составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$. Вычислить его координаты, если $|\mathbf{a}| = 2$. (Ответ: $\mathbf{a} = (1, -1, \sqrt{2})$ или $\mathbf{a} = (1, -1, -\sqrt{2})$.)

6. Даны векторы $\mathbf{a} = (3, -2, 6)$ и $\mathbf{b} = (-2, 1, 0)$. Найти координаты векторов: $2\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b}$; $\frac{1}{3}\mathbf{a} - \mathbf{b}$; $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$. (Ответ: $(20/3, -13/3, 12)$; $(3, -5/3, 2)$; $(0, -1, 12)$.)

7. Найти координаты единичного вектора \mathbf{e} , направленного по биссектрисе угла, образуемого векторами $\mathbf{a} = (2, -3, 6)$ и $\mathbf{b} = (-1, 2, -2)$. (Ответ: $\mathbf{e} = \left(-\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}}\right)$.)

8. В некотором базисе векторы заданы координатами: $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{e}_1 = (2, 2, -1)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 4, 8)$, $\mathbf{e}_3 = (-1, -1, 3)$. Убедиться, что векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ образуют базис, и найти в нем координаты вектора \mathbf{a} . (Ответ: $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$.)

Самостоятельная работа

1. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = (3, -5, 8)$ и $\mathbf{b} = (-1, 1, -4)$. (Ответ: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 6$, $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 14$.)

2. Векторы $\vec{AB} = (2, 6, -4)$ и $\vec{AC} = (4, 2, -2)$ определяют стороны треугольника ABC . Найти длину вектора \vec{CD} , совпадающего с медианой, проведенной из вершины C . (Ответ: $|\vec{CD}| = \sqrt{10}$.)

3. Найти координаты вектора \mathbf{c} , направленного по биссектрисе угла между векторами $\mathbf{a} = (-3, 0, 4)$ и $\mathbf{b} = (5, 2, 14)$. (Ответ: $\mathbf{c} = \lambda(-2, 1, 13)$, $\lambda > 0$.)

2.2. ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2 , называется число λ , удовлетворяющее равенству $\vec{M_1M} = \lambda \vec{MM_2}$. Связь между ко-

ординатами делящей точки $M(x, y, z)$, точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и числом λ задается равенствами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Деление отрезка M_1M_2 будет *внутренним*, если $\lambda > 0$, и *внешним*, если $\lambda < 0$. При $\lambda = 1$ точка M будет серединой отрезка M_1M_2 , $\lambda \neq -1$.

Пример 1. Концы однородного стержня находятся в точках $M_1(3, -5, 8)$ и $M_2(7, 13, -6)$. Найти координаты центра масс стержня.

► Центр масс $C(x, y, z)$ однородного стержня находится в его середине. Поэтому $\lambda = 1$ и

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + 7}{2} = 5, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-5 + 13}{2} = 4, \\ z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{8 - 6}{2} = 1. \quad \blacktriangleleft$$

Скалярным произведением двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называется число, обозначаемое $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ и равное произведению модулей данных векторов на косинус угла между ними:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}),$$

где $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ обозначает меньший угол между направлениями векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Отметим, что всегда $0 \leq (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) \leq \pi$.

Перечислим *основные свойства скалярного произведения векторов*:

- 1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;
- 2) $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$;
- 3) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$;
- 4) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \text{ пр }_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \text{ пр }_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$;
- 5) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$;
- 6) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Если $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2, \\ |\mathbf{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}.$$

Обозначим через α, β, γ углы, которые образует вектор $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно (или, что то же самое, с векторами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$). Тогда справедливы следующие формулы:

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}}{|\mathbf{a}|} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \quad \cos \beta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{j}}{|\mathbf{a}|} = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \\ \cos \gamma = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{a}|} = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}}, \quad \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Величины $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ называются *направляющими косинусами вектора \mathbf{a}* .

Работа A силы \mathbf{F} , произведенная этой силой при перемещении тела на пути $|\mathbf{s}|$, определяемом вектором \mathbf{s} , вычисляется по формуле

$$A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}| |\mathbf{s}| \cos(\widehat{\mathbf{F}, \mathbf{s}}).$$

Пример 2. Вычислить работу равнодействующей F сил $F_1 = (3, -4, 5)$, $F_2 = (2, 1, -4)$, $F_3 = (-1, 6, 2)$, приложенных к материальной точке, которая под их действием перемещается прямолинейно из точки $M_1(4, 2, -3)$ в точку $M_2(7, 4, 1)$.

► Так как $F = F_1 + F_2 + F_3 = (4, 3, 3)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = s = (3, 2, 4)$, то $A = F \cdot s = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 30$. ◀

А3-2.2

1. Даны две вершины $A(2, -3, -5)$, $B(-1, 3, 2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $E(4, -1, 7)$. Найти координаты остальных вершин параллелограмма. (Ответ: $C(6, 1, 19)$, $D(9, -5, 12)$.)

2. Отрезок, ограниченный точками $A(-1, 8, -3)$ и $B(9, -7, -2)$, разделен точками M_1, M_2, M_3, M_4 на пять равных частей. Найти координаты точек M_1 и M_3 . (Ответ: $M_1(1, 5, -2)$, $M_3(5, -1, 0)$.)

3. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $C(2, 0, 2)$ и $D(5, -2, 0)$ разделен на три равные части. (Ответ: $A(-1, 2, 4)$, $B(8, -4, -2)$.)

4. Векторы a и b образуют угол $\varphi = 2\pi/3$, и $|a| = 3$, $|b| = 4$. Вычислить: a^2 ; b^2 ; $(a+b)^2$; $(a-b)^2$; $(3a - 2b) \cdot (a + 2b)$. (Ответ: 9; 16; 13; 37; -61.)

5. Даны векторы $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, для которых $|a| = 2$, $|b| = 4$, $(a, b) = 60^\circ$. Вычислить угол φ между медианой \overrightarrow{OM} и стороной \overrightarrow{OA} треугольника AOB . (Ответ: $\cos \varphi = 2/\sqrt{7}$, $\varphi \approx 41^\circ$.)

6. Определить работу силы F , $|F| = 15$ Н, которая, действуя на тело, вызывает его перемещение на 4 м под углом $\pi/3$ к направлению действия силы. (Ответ: 30 Дж.)

7. Даны векторы $a = (4, -2, -4)$, $b = (6, -3, 2)$. Вычислить: $a \cdot b$; a^2 ; b^2 ; $(a+b)^2$; $(a-b)^2$; $(2a - 3b) \cdot (a + 2b)$. (Ответ: 22; 36; 49; 129; 41; -200.)

8. Даны вершины треугольника ABC : $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$. Вычислить внешний угол при вершине B . (Ответ: $3\pi/4$.)

9. Под действием силы $F = (5, 4, 3)$ тело переместилось из начала вектора $s = (2, 1, -2)$ в его конец. Вычислить работу A силы F и угол φ между направлениями силы и перемещения. (Ответ: $A = 8$, $\cos \varphi \approx 0,38$, $\varphi \approx 1,18$ рад или $\varphi \approx 67^\circ 40'$.)

Самостоятельная работа

1. Даны вершины четырехугольника $A(1, -2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-4, 1, 1)$, $D(-5, -5, 3)$. Вычислить угол φ между его диагоналями. (Ответ: $\varphi = 90^\circ$.)

2. При каком значении α векторы $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \alpha\mathbf{k}$ взаимно перпендикулярны? (Ответ: $\alpha = -6$.)

3. Найти координаты вектора \mathbf{b} , коллинеарного вектору $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$, при условии $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3$. (Ответ: $\mathbf{b} = (1, 1/2, -1/2)$.)

2.3. ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Упорядоченная тройка некопланарных векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} с общим началом в точке O называется *правой*, если кратчайший поворот от вектора \mathbf{a} к вектору \mathbf{b} наблюдается из конца вектора \mathbf{c} с происходящим против движения часовой стрелки (рис. 2.7, а). В противном случае данная тройка называется *левой* (рис. 2.7, б).

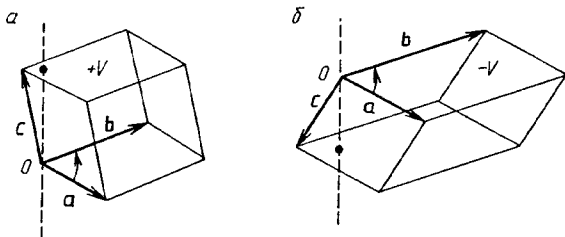


Рис. 2.7

Векторным произведением векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называется вектор \mathbf{c} , обозначаемый $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, который удовлетворяет следующим трем условиям:

- 1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;
- 2) $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$;
- 3) тройка \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} — правая (рис. 2.8).

Перечислим *основные свойства векторного произведения векторов*:

- 1) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$;
- 2) $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b})$;
- 3) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$;
- 4) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$;
- 5) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = S$, где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} , имеющих общее начало в точке O (см. рис. 2.8).

Если $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, то векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ выражается через координаты данных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} следующим образом:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

С помощью векторного произведения можно вычислить *вращающий момент* \mathbf{M} силы \mathbf{F} , приложенной к точке B тела, закрепленного в точке A : $\mathbf{M} = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{F}$ (рис. 2.9).

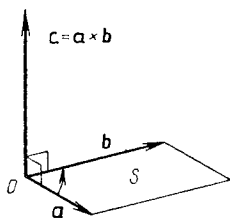


Рис. 2.8

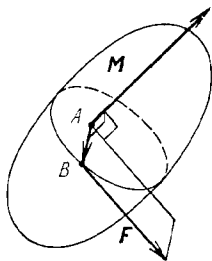


Рис. 2.9

Пример 1. Вычислить координаты вращающего момента \mathbf{M} силы $\mathbf{F} = (3, 2, 1)$, приложенной к точке $A(-1, 2, 4)$, относительно начала координат O .

► Имеем

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{OA} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-6, 13, -8). \blacktriangleleft$$

Смешанным произведением векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} называется число $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

Перечислим *основные свойства смешанного произведения векторов*:

1) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, поэтому смешанное произведение можно обозначать проще: \mathbf{abc} ;

2) $\mathbf{abc} = \mathbf{bca} = \mathbf{cab} = -\mathbf{bac} = -\mathbf{cba} = -\mathbf{acb}$;

3) геометрический смысл смешанного произведения заключается в следующем: $\mathbf{abc} = \pm V$, где V — объем параллелепипеда, построенного на перемножаемых векторах, взятый со знаком «+», если тройка векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} — правая, или со знаком «-», если она левая (см. рис. 2.7);

4) $\mathbf{abc} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}$, \mathbf{b} , \mathbf{c} компланарны.

Если $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\mathbf{c} = (x_3, y_3, z_3)$, то

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 2. Даны векторы $\mathbf{a} = (1, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (-2, 4, -1)$, $\mathbf{c} = (2, 4, -6)$. Требуется установить, компланарны ли данные векторы, в случае их некомпланарности выяснить, какую тройку (правую или

левую) они образуют, и вычислить объем построенного на них параллелепипеда.

► Вычислим

$$abc = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & 4 & -6 \end{vmatrix} = -78.$$

Из значения смешанного произведения следует, что векторы некомпланарны, образуют левую тройку и $V = 78$. ◀

А3-2.3

1. Векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} взаимно перпендикулярны, $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$. Вычислить: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$; $|(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b})|$; $|(3\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})|$. (Ответ: 12; 24; 60.)

2. Даны векторы $\mathbf{a} = (3, -1, -2)$, $\mathbf{b} = (1, 2, -1)$. Найти координаты векторов: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$; $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{b}$; $(2\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (2\mathbf{a} + \mathbf{b})$. (Ответ: (5, 1, 7); (10, 2, 14); (20, 4, 28).)

3. Вычислить площадь треугольника ABC , если известно, что: $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, 3)$, $C(5, 2, 6)$. (Ответ: $2\sqrt{13}$.)

4. Сила $\mathbf{F} = (2, 2, 9)$ приложена к точке $A(4, 2, -3)$. Вычислить величину и направляющие косинусы момента \mathbf{M} этой силы относительно точки $B(2, 4, 0)$. (Ответ: $|\mathbf{M}| = 28$, $\cos \alpha = 3/7$, $\cos \beta = 6/7$, $\cos \gamma = -2/7$.)

5. Даны вершины пирамиды $A(2, 0, 4)$, $B(0, 3, 7)$, $C(0, 0, 6)$, $S(4, 3, 5)$. Вычислить ее объем V и высоту H , опущенную на грань ACS . (Ответ: $V = 2$, $H = 2/\sqrt{3}$.)

6. Лежат ли точки $A(1, 2, -1)$, $B(4, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ в одной плоскости? (Ответ: лежат.)

7. Компланарны ли следующие векторы: а) $\mathbf{a} = (2, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 3)$, $\mathbf{c} = (-1, 9, -11)$; б) $\mathbf{a} = (3, -2, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 1, 2)$, $\mathbf{c} = (3, -1, -2)$? (Ответ: а) компланарны; б) не компланарны.)

8. Выяснить, правой или левой будет тройка векторов $\mathbf{a} = (3, 4, 0)$, $\mathbf{b} = (0, -4, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 2, 5)$. (Ответ: левой.)

Самостоятельная работа

1. 1) Дано: $|\mathbf{a}| = 10$, $|\mathbf{b}| = 2$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 12$. Вычислить $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ (Ответ: 16.)

2) Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = (0, -1, 1)$ и $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$. (Ответ: 6.)

2. Сила $\mathbf{F} = (3, 2, -4)$ приложена к точке $A(2, -1, 1)$. Найти вращающий момент \mathbf{M} этой силы относительно начала координат. (Ответ: $\mathbf{M} = (2, 11, 7)$.)

3. Вычислить объем V треугольной призмы, построенной на векторах $\mathbf{a} = (7, 6, 1)$, $\mathbf{b} = (4, 0, 3)$, $\mathbf{c} = (3, 6, 4)$.
(Ответ: $V = 24$.)

2.4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 2

ИДЗ-2.1

1. Даны векторы $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{m} + \beta \mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = \gamma \mathbf{m} + \delta \mathbf{n}$, где $|\mathbf{m}| = k$; $|\mathbf{n}| = l$; $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = \varphi$. Найти: а) $(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}) \cdot (\nu \mathbf{a} + \tau \mathbf{b})$; б) $\text{пр}_{\nu}(\nu \mathbf{a} + \tau \mathbf{b})$; в) $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \tau \mathbf{b}})$.

1.1. $\alpha = -5$, $\beta = -4$, $\gamma = 3$, $\delta = 6$, $k = 3$, $l = 5$, $\varphi = 5\pi/3$, $\lambda = -2$, $\mu = 1/3$, $\nu = 1$, $\tau = 2$. (Ответ: а) 2834.)

1.2. $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$, $\delta = -1$, $k = 1$, $l = 3$, $\varphi = \pi$, $\lambda = 3$, $\mu = 2$, $\nu = -2$, $\tau = 4$. (Ответ: а) -950.)

1.3. $\alpha = 5$, $\beta = -2$, $\gamma = -3$, $\delta = -1$, $k = 4$, $l = 5$, $\varphi = 4\pi/3$, $\lambda = 2$, $\mu = 3$, $\nu = -1$, $\tau = 5$. (Ответ: а) -1165.)

1.4. $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $\gamma = -6$, $\delta = -4$, $k = 3$, $l = 2$, $\varphi = 5\pi/3$, $\lambda = -1$, $\mu = 1/2$, $\nu = 2$, $\tau = 3$. (Ответ: а) 416.)

1.5. $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = -4$, $\delta = 5$, $k = 2$, $l = 3$, $\varphi = \pi/3$, $\lambda = 2$, $\mu = -3$, $\nu = 5$, $\tau = 1$. (Ответ: а) 750.)

1.6. $\alpha = 2$, $\beta = -5$, $\gamma = -3$, $\delta = 4$, $k = 2$, $l = 4$, $\varphi = 2\pi/3$, $\lambda = 3$, $\mu = -4$, $\nu = 2$, $\tau = 3$. (Ответ: а) -2116.)

1.7. $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = -4$, $\delta = -2$, $k = 2$, $l = 5$, $\varphi = 4\pi/3$, $\lambda = 1$, $\mu = -3$, $\nu = 0$, $\tau = -1/2$. (Ответ: а) 165.)

1.8. $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$, $\delta = -4$, $k = 3$, $l = 2$, $\varphi = \pi$, $\lambda = 1$, $\mu = -2$, $\nu = 3$, $\tau = -4$. (Ответ: а) -583.)

1.9. $\alpha = -3$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$, $\delta = 5$, $k = 3$, $l = 6$, $\varphi = 4\pi/3$, $\lambda = -1$, $\mu = 2$, $\nu = 1$, $\tau = 1$. (Ответ: а) 1287.)

1.10. $\alpha = 5$, $\beta = -3$, $\gamma = 4$, $\delta = 2$, $k = 4$, $l = 1$, $\varphi = 2\pi/3$, $\lambda = 2$, $\mu = -1/2$, $\nu = 3$, $\tau = 0$. (Ответ: а) 2337.)

1.11. $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\gamma = 3$, $\delta = -6$, $k = 6$, $l = 3$, $\varphi = 5\pi/3$, $\lambda = 3$, $\mu = -1/3$, $\nu = 1$, $\tau = 2$. (Ответ: а) -936.)

1.12. $\alpha = -2$, $\beta = -4$, $\gamma = 3$, $\delta = 1$, $k = 3$, $l = 2$, $\varphi = 7\pi/3$, $\lambda = -1/2$, $\mu = 3$, $\nu = 1$, $\tau = 2$. (Ответ: а) 320.)

1.13. $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $\gamma = -1$, $\delta = 2$, $k = 4$, $l = 5$, $\varphi = 3\pi/2$, $\lambda = 2$, $\mu = -3$, $\nu = 1$, $\tau = 2$. (Ответ: а) 352.)

1.14. $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\gamma = 5$, $\delta = 1$, $k = 2$, $l = 5$, $\varphi = 2\pi$, $\lambda = -3$, $\mu = 4$, $\nu = 2$, $\tau = 3$. (Ответ: а) 1809.)

1.15. $\alpha = 4$, $\beta = -3$, $\gamma = 5$, $\delta = 2$, $k = 4$, $l = 7$, $\varphi = 4\pi/3$, $\lambda = -3$, $\mu = 2$, $\nu = 2$, $\tau = -1$. (Ответ: а) -5962.)

1.16. $\alpha = -5, \beta = 3, \gamma = 2, \delta = 4, k = 5, l = 4, \varphi = \pi, \lambda = -3, \mu = 1/2, \nu = -1, \tau = 1.$ (Ответ: а) 3348.)

1.17. $\alpha = 5, \beta = -2, \gamma = 3, \delta = 4, k = 2, l = 5, \varphi = \pi/2, \lambda = 2, \mu = 3, \nu = 1, \tau = -2.$ (Ответ: а) -2076.)

1.18. $\alpha = 7, \beta = -3, \gamma = 2, \delta = 6, k = 3, l = 4, \varphi = 5\pi/3, \lambda = 3, \mu = -1/2, \nu = 2, \tau = 1.$ (Ответ: а) 1728.)

1.19. $\alpha = 4, \beta = -5, \gamma = -1, \delta = 3, k = 6, l = 3, \varphi = 2\pi/3, \lambda = 2, \mu = -5, \nu = 1, \tau = 2.$ (Ответ: а) 1044.)

1.20. $\alpha = 3, \beta = -5, \gamma = -2, \delta = 3, k = 1, l = 6, \varphi = 3\pi/2, \lambda = 4, \mu = 5, \nu = 1, \tau = -2.$ (Ответ: а) 1994.)

1.21. $\alpha = -5, \beta = -6, \gamma = 2, \delta = 7, k = 2, l = 7, \varphi = \pi, \lambda = -2, \mu = 5, \nu = 1, \tau = 3.$ (Ответ: а) 29767.)

1.22. $\alpha = -7, \beta = 2, \gamma = 4, \delta = 6, k = 2, l = 9, \varphi = \pi/3, \lambda = 1, \mu = 2, \nu = -1, \tau = 3.$ (Ответ: а) 20758.)

1.23. $\alpha = 5, \beta = 4, \gamma = -6, \delta = 2, k = 2, l = 9, \varphi = 2\pi/3, \lambda = 3, \mu = 2, \nu = 1, \tau = -1/2.$ (Ответ: а) 2751.)

1.24. $\alpha = -5, \beta = -7, \gamma = -3, \delta = 2, k = 2, l = 11, \varphi = 3\pi/2, \lambda = -3, \mu = 4, \nu = -1, \tau = 2.$ (Ответ: а) 38587.)

1.25. $\alpha = 5, \beta = -8, \gamma = -2, \delta = 3, k = 4, l = 3, \varphi = 4\pi/3, \lambda = 2, \mu = -3, \nu = 1, \tau = 2.$ (Ответ: а) 1048.)

1.26. $\alpha = -3, \beta = 5, \gamma = 1, \delta = 7, k = 4, l = 6, \varphi = 5\pi/3, \lambda = -2, \mu = 3, \nu = 3, \tau = -2.$ (Ответ: а) -2532.)

1.27. $\alpha = -3, \beta = 4, \gamma = 5, \delta = -6, k = 4, l = 5, \varphi = \pi, \lambda = 2, \mu = 3, \nu = -3, \tau = -1.$ (Ответ: а) 21156.)

1.28. $\alpha = 6, \beta = -7, \gamma = -1, \delta = -3, k = 2, l = 6, \varphi = 4\pi/3, \lambda = 3, \mu = -2, \nu = 1, \tau = 4.$ (Ответ: а) -12200.)

1.29. $\alpha = 5, \beta = 3, \gamma = -4, \delta = -2, k = 6, l = 3, \varphi = 5\pi/3, \lambda = -2, \mu = -1/2, \nu = 3, \tau = 2.$ (Ответ: а) -2916.)

1.30. $\alpha = 4, \beta = -3, \gamma = -2, \delta = 6, k = 4, l = 7, \varphi = \pi/3, \lambda = 2, \mu = -1/2, \nu = 3, \tau = 2.$ (Ответ: а) -801.)

2. По координатам точек A, B и C для указанных векторов найти: а) модуль вектора \mathbf{a} ; б) скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} ; в) проекцию вектора \mathbf{c} на вектор \mathbf{d} ; г) координаты точки M , делящей отрезок l в отношении $\alpha:\beta$.

2.1. $A(4, 6, 3), B(-5, 2, 6), C(4, -4, -3), \mathbf{a} = 4\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}, \mathbf{b} = \overrightarrow{AB}, \mathbf{c} = \overrightarrow{CB}, \mathbf{d} = \overrightarrow{AC}, l = AB, \alpha = 5, \beta = 4.$ (Ответ: а) $\sqrt{4216}$; б) 314; г) $(-1, 34/9, 14/3)$.)

2.2. $A(4, 3, -2), B(-3, -1, 4), C(2, 2, 1), \mathbf{a} = -5\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB}, \mathbf{b} = \overrightarrow{AB}, \mathbf{c} = \overrightarrow{AC}, \mathbf{d} = \overrightarrow{CB}, l = BC, \alpha = 2, \beta = 3.$ (Ответ: а) $\sqrt{82}$; б) -50; г) $(-1, 1/5, 14/5)$.)

2.3. $A(-2, -2, 4), B(1, 3, -2), C(1, 4, 2), \mathbf{a} = 2\vec{AC} - 3\vec{BA}, \mathbf{b} = \vec{BC}, \mathbf{c} = \vec{BC}, \mathbf{d} = \vec{AC}, l = BA, \alpha = 2, \beta = 1.$
 (Ответ: а) $\sqrt{1750}$; б) -53 ; г) $(-1, -1/3, 2).$)

2.4. $A(2, 4, 3), B(3, 1, -4), C(-1, 2, 2), \mathbf{a} = 2\vec{BA} + 4\vec{AC}, \mathbf{b} = \vec{BA}, \mathbf{c} = \mathbf{b}, \mathbf{d} = \vec{AC}, l = BA, \alpha = 1, \beta = 4.$
 (Ответ: а) $\sqrt{300}$; б) 78 ; г) $(14/5, 8/5, -13/5).$)

2.5. $A(2, 4, 5), B(1, -2, 3), C(-1, -2, 4), \mathbf{a} = 3\vec{AB} - 4\vec{AC}, \mathbf{b} = \vec{BC}, \mathbf{c} = \mathbf{b}, \mathbf{d} = \vec{AB}, l = AB, \alpha = 2, \beta = 3.$
 (Ответ: а) 11 ; б) -20 ; г) $(8/5, 8/5, 21/5).$)

2.6. $A(-1, -2, 4), B(-1, 3, 5), C(1, 4, 2), \mathbf{a} = 3\vec{AC} - 7\vec{BC}, \mathbf{b} = \vec{AB}, \mathbf{c} = \mathbf{b}, \mathbf{d} = \vec{AC}, l = AC, \alpha = 1, \beta = 7.$
 (Ответ: а) $\sqrt{410}$; б) 70 ; г) $(-3/4, -5/4, 15/4).$)

2.7. $A(1, 3, 2), B(-2, 4, -1), C(1, 3, -2), \mathbf{a} = 2\vec{AB} + 5\vec{CB}, \mathbf{b} = \vec{AC}, \mathbf{c} = \mathbf{b}, \mathbf{d} = \vec{AB}, l = AB, \alpha = 2, \beta = 4.$
 (Ответ: а) $\sqrt{491}$; б) 4 ; г) $(0, 10/3, 1).$)

2.8. $A(2, -4, 3), B(-3, -2, 4), C(0, 0, -2), \mathbf{a} = 3\vec{AC} - 4\vec{CB}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{AB}, \mathbf{d} = \vec{CB}, l = AC, \alpha = 2, \beta = 1.$
 (Ответ: а) $\sqrt{1957}$; б) -29 ; г) $(2/3, -4/5, -1/3).$)

2.9. $A(3, 4, -4), B(-2, 1, 2), C(2, -3, 1), \mathbf{a} = 5\vec{CB} + 4\vec{AC}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{BA}, \mathbf{d} = \vec{AC}, l = BA, \alpha = 2, \beta = 5.$
 (Ответ: а) $\sqrt{1265}$; б) -294 ; г) $(-4/7, 13/7, 2/7).$)

2.10. $A(0, 2, 5), B(2, -3, 4), C(3, 2, -5), \mathbf{a} = -3\vec{AB} + 4\vec{CB}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{AC}, \mathbf{d} = \vec{AB}, l = AC, \alpha = 3, \beta = 2.$ (Ответ: а) $\sqrt{1646}$; б) -420 ; г) $(9/5, 2, -1).$)

2.11. $A(-2, -3, -4), B(2, -4, 0), C(1, 4, 5), \mathbf{a} = 4\vec{AC} - 8\vec{BC}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{AB}, \mathbf{d} = \vec{BC}, l = AB, \alpha = 4, \beta = 2.$
 (Ответ: а) $\sqrt{1777}$; б) 80 ; г) $(2/3, -11/3, -4/3).$)

2.12. $A(-2, -3, -2), B(1, 4, 2), C(1, -3, 3), \mathbf{a} = 2\vec{AC} - 4\vec{BC}, \mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{AB}, \mathbf{d} = \vec{AC}, l = BC, \alpha = 3, \beta = 1.$
 (Ответ: а) $\sqrt{856}$; б) 238 ; г) $(1, -5/4, 11/4).$)

2.13. $A(5, 6, 1), B(-2, 4, -1), C(3, -3, 3), \mathbf{a} = 3\vec{AB} -$

- $-4\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AB}$, $l = BC$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$.
 (Ответ: а) $\sqrt{2649}$; б) -160 ; г) $(1, -1/5, 7/5)$.)
- 2.14.** $A(10, 6, 3)$, $B(-2, 4, 5)$, $C(3, -4, -6)$, $\mathbf{a} = 5\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{BA}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = CB$, $\alpha = 1$, $\beta = 5$.
 (Ответ: а) $\sqrt{9470}$; б) -298 ; г) $(13/6, -8/3, -25/6)$.)
- 2.15.** $A(3, 2, 4)$, $B(-2, 1, 3)$, $C(2, -2, -1)$, $\mathbf{a} = 4\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BA}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha = 2$, $\beta = 4$.
 (Ответ: а) $\sqrt{362}$; б) 94 ; г) $(8/3, 2/3, 7/3)$.)
- 2.16.** $A(-2, 3, -4)$, $B(3, -1, 2)$, $C(4, 2, 4)$, $\mathbf{a} = 7\overrightarrow{AC} + 4\overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{CB}$, $l = AB$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$. (Ответ: а) $\sqrt{4109}$; б) 554 ; г) $(-4/7, 13/7, -16/7)$.)
- 2.17.** $A(4, 5, 3)$, $B(-4, 2, 3)$, $C(5, -6, -2)$, $\mathbf{a} = 9\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AB}$, $l = BC$, $\alpha = 5$, $\beta = 1$. (Ответ: а) $\sqrt{12089}$; б) -263 ; г) $(7/2, -14/3, -7/6)$.)
- 2.18.** $A(2, 4, 6)$, $B(-3, 5, 1)$, $C(4, -5, -4)$, $\mathbf{a} = -6\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{BA}$, $l = BC$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$. (Ответ: а) $\sqrt{5988}$; б) 986 ; г) $(-5/4, 5/2, -1/4)$.)
- 2.19.** $A(-4, -2, -5)$, $B(3, 7, 2)$, $C(4, 6, -3)$, $\mathbf{a} = 9\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{BC}$, $l = BA$, $\alpha = 4$, $\beta = 3$.
 (Ответ: а) $\sqrt{16740}$; б) -1308 ; г) $(-1, 13/7, -2)$.)
- 2.20.** $A(5, 4, 4)$, $B(-5, 2, 3)$, $C(4, 2, -5)$, $\mathbf{a} = 11\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = BC$, $\alpha = 3$, $\beta = 1$.
 (Ответ: а) $\sqrt{11150}$; б) 1185 ; г) $(7/4, 2, -3)$.)
- 2.21.** $A(3, 4, 6)$, $B(-4, 6, 4)$, $C(5, -2, -3)$, $\mathbf{a} = -7\overrightarrow{BC} + 4\overrightarrow{CA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BA}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{BC}$, $l = BA$, $\alpha = 5$, $\beta = 3$. (Ответ: а) $\sqrt{18666}$; б) -487 ; г) $(3/8, 19/4, 21/4)$.)
- 2.22.** $A(-5, -2, -6)$, $B(3, 4, 5)$, $C(2, -5, 4)$, $\mathbf{a} = 8\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{BC}$, $l = AC$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$,
 (Ответ: а) $\sqrt{11387}$; б) 1549 ; г) $(-2, -23/7, -12/7)$.)
- 2.23.** $A(3, 4, 1)$, $B(5, -2, 6)$, $C(4, 2, -7)$, $\mathbf{a} = -7\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{AC}$, $l = AB$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$.
 (Ответ: а) $\sqrt{6826}$; б) -1120 ; г) $(19/5, 8/5, 3)$.)

2.24. $A(4, 3, 2)$, $B(-4, -3, 5)$, $C(6, 4, -3)$, $\mathbf{a} = 8\vec{AC} - 5\vec{BC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{BA}$, $\mathbf{d} = \vec{AC}$, $l = BC$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$.
(Ответ: а) $\sqrt{1885}$; б) -434 ; г) $(-8/7, -1, 19/7)$.)

2.25. $A(-5, 4, 3)$, $B(4, 5, 2)$, $C(2, 7, -4)$, $\mathbf{a} = 3\vec{BC} + 2\vec{AB}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{CA}$, $\mathbf{d} = \vec{AB}$, $l = BC$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$. (Ответ: а) $\sqrt{608}$; б) -248 ; г) $(22/7, 41/7, -4/7)$.)

2.26. $A(6, 4, 5)$, $B(-7, 1, 8)$, $C(2, -2, -7)$, $\mathbf{a} = 5\vec{CB} - 2\vec{AC}$, $\mathbf{b} = \vec{AB}$, $\mathbf{c} = \vec{CB}$, $\mathbf{d} = \vec{AC}$, $l = AB$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$.
(Ответ: а) $\sqrt{11899}$; б) 697 ; г) $(-9/5, 11/5, 34/5)$.)

2.27. $A(6, 5, -4)$, $B(-5, -2, 2)$, $C(3, 3, 2)$, $\mathbf{a} = 6\vec{AB} - 3\vec{CB}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{AC}$, $\mathbf{d} = \vec{CB}$, $l = BC$, $\alpha = 1$, $\beta = 5$. (Ответ: а) $\sqrt{3789}$; б) 396 ; г) $(-11/3, -7/6, 2)$.)

2.28. $A(-3, -5, 6)$, $B(3, 5, -4)$, $C(2, 6, 4)$, $\mathbf{a} = 4\vec{AC} - 5\vec{BA}$, $\mathbf{b} = \vec{CB}$, $\mathbf{c} = \vec{BA}$, $\mathbf{d} = \vec{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 4$, $\beta = 2$.
(Ответ: а) $\sqrt{14700}$; б) 470 ; г) $(-1, -5/3, 8/3)$.)

2.29. $A(3, 5, 4)$, $B(4, 2, -3)$, $C(-2, 4, 7)$, $\mathbf{a} = 3\vec{BA} - 4\vec{AC}$, $\mathbf{b} = \vec{AB}$, $\mathbf{c} = \vec{BA}$, $\mathbf{d} = \vec{AC}$, $l = BA$, $\alpha = 2$, $\beta = 5$. (Ответ: а) $\sqrt{539}$; б) -85 ; г) $(26/7, 20/7, -1)$.)

2.30. $A(4, 6, 7)$, $B(2, -4, 1)$, $C(-3, -4, 2)$, $\mathbf{a} = 5\vec{AB} - 2\vec{AC}$, $\mathbf{b} = \mathbf{c} = \vec{BC}$, $\mathbf{d} = \vec{AB}$, $l = AB$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$. (Ответ: а) $\sqrt{1316}$; б) -40 ; г) $(22/7, 12/7, 31/7)$.)

3. Доказать, что векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} образуют базис, и найти координаты вектора \mathbf{d} в этом базисе.

3.1. $\mathbf{a} = (5, 4, 1)$, $\mathbf{b} = (-3, 5, 2)$, $\mathbf{c} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{d} = (7, 23, 4)$. (Ответ: $(3, 2, -1)$.)

3.2. $\mathbf{a} = (2, -1, 4)$, $\mathbf{b} = (-3, 0, -2)$, $\mathbf{c} = (4, 5, -3)$, $\mathbf{d} = (0, 11, -14)$. (Ответ: $(-1, 2, 2)$.)

3.3. $\mathbf{a} = (-1, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, -3, -5)$, $\mathbf{c} = (-6, 3, -1)$, $\mathbf{d} = (28, -19, -7)$. (Ответ: $(2, 3, -4)$.)

3.4. $\mathbf{a} = (1, 3, 4)$, $\mathbf{b} = (-2, 5, 0)$, $\mathbf{c} = (3, -2, -4)$, $\mathbf{d} = (13, -5, -4)$. (Ответ: $(2, -1, 3)$.)

3.5. $\mathbf{a} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (-5, -3, 1)$, $\mathbf{c} = (2, -1, 0)$, $\mathbf{d} = (-15, -10, 5)$. (Ответ: $(2, 3, -1)$.)

3.6. $\mathbf{a} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (-7, -2, -4)$, $\mathbf{c} = (-4, 0, 3)$, $\mathbf{d} = (16, 6, 15)$. (Ответ: $(2, -2, 1)$.)

- 3.7. $\mathbf{a} = (-3, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 7, -3)$, $\mathbf{c} = (-4, 3, 5)$,
 $\mathbf{d} = (-16, 33, 13)$. (Ответ: $(2, 3, 4)$.)
- 3.8. $\mathbf{a} = (5, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (-2, 1, -3)$, $\mathbf{c} = (4, -3, 5)$,
 $\mathbf{d} = (15, -15, 24)$. (Ответ: $(-1, 28, 4)$.)
- 3.9. $\mathbf{a} = (0, 2, -3)$, $\mathbf{b} = (4, -3, -2)$, $\mathbf{c} = (-5, -4, 0)$,
 $\mathbf{d} = (-19, -5, -4)$. (Ответ: $(2, -1, 3)$.)
- 3.10. $\mathbf{a} = (3, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (-2, 3, 1)$, $\mathbf{c} = (4, -5, -3)$,
 $\mathbf{d} = (-3, 2, -3)$. (Ответ: $(-1, 2, 1)$.)
- 3.11. $\mathbf{a} = (5, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 2, -3)$, $\mathbf{c} = (3, -4, 2)$,
 $\mathbf{d} = (-9, 34, -20)$. (Ответ: $(2, 4, -5)$.)
- 3.12. $\mathbf{a} = (3, 1, -3)$, $\mathbf{b} = (-2, 4, 1)$, $\mathbf{c} = (1, -2, 5)$,
 $\mathbf{d} = (1, 12, -20)$. (Ответ: $(2, 1, -3)$.)
- 3.13. $\mathbf{a} = (6, 1, -3)$, $\mathbf{b} = (-3, 2, 1)$, $\mathbf{c} = (-1, -3, 4)$,
 $\mathbf{d} = (15, 6, -17)$. (Ответ: $(1, -2, -3)$.)
- 3.14. $\mathbf{a} = (4, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (-3, 1, -8)$, $\mathbf{c} = (2, -4, 5)$,
 $\mathbf{d} = (-12, 14, -31)$. (Ответ: $(0, 2, -3)$.)
- 3.15. $\mathbf{a} = (-2, 1, 3)$, $\mathbf{b} = (3, -6, 2)$, $\mathbf{c} = (-5, -3, -1)$,
 $\mathbf{d} = (31, -6, 22)$. (Ответ: $(3, 4, -5)$.)
- 3.16. $\mathbf{a} = (1, 3, 6)$, $\mathbf{b} = (-3, 4, -5)$, $\mathbf{c} = (1, -7, 2)$,
 $\mathbf{d} = (-2, 17, 5)$. (Ответ: $(12, 1, -1)$.)
- 3.17. $\mathbf{a} = (7, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (5, 1, -2)$, $\mathbf{c} = (-3, 4, 5)$,
 $\mathbf{d} = (26, 11, 1)$. (Ответ: $(2, 3, 1)$.)
- 3.18. $\mathbf{a} = (3, 5, 4)$, $\mathbf{b} = (-2, 7, -5)$, $\mathbf{c} = (6, -2, 1)$,
 $\mathbf{d} = (6, -9, 22)$. (Ответ: $(2, -3, -1)$.)
- 3.19. $\mathbf{a} = (5, 3, 2)$, $\mathbf{b} = (2, -5, 1)$, $\mathbf{c} = (-7, 4, -3)$,
 $\mathbf{d} = (36, 1, 15)$. (Ответ: $(5, 2, -1)$.)
- 3.20. $\mathbf{a} = (11, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (-3, 3, 4)$, $\mathbf{c} = (-4, -2, 7)$,
 $\mathbf{d} = (-5, 11, -15)$. (Ответ: $(-1, 2, -3)$.)
- 3.21. $\mathbf{a} = (9, 5, 3)$, $\mathbf{b} = (-3, 2, 1)$, $\mathbf{c} = (4, -7, 4)$,
 $\mathbf{d} = (-10, -13, 8)$. (Ответ: $(-1, 3, 2)$.)
- 3.22. $\mathbf{a} = (7, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (3, -5, 6)$, $\mathbf{c} = (-4, 3, -4)$,
 $\mathbf{d} = (-1, 18, -16)$. (Ответ: $(2, -1, 3)$.)
- 3.23. $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (-5, 3, -1)$, $\mathbf{c} = (-6, 4, 5)$,
 $\mathbf{d} = (-4, 11, 20)$. (Ответ: $(3, -1, 2)$.)
- 3.24. $\mathbf{a} = (-2, 5, 1)$, $\mathbf{b} = (3, 2, -7)$, $\mathbf{c} = (4, -3, 2)$,
 $\mathbf{d} = (-4, 22, -13)$. (Ответ: $(3, 2, -1)$.)
- 3.25. $\mathbf{a} = (3, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (-4, 3, -1)$, $\mathbf{c} = (2, 3, 4)$, $\mathbf{d} =$
 $= (14, 14, 20)$. (Ответ: $(2, 0, 4)$.)
- 3.26. $\mathbf{a} = (3, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (-2, 4, 1)$, $\mathbf{c} = (4, -5, -1)$,
 $\mathbf{d} = (-5, 11, 1)$. (Ответ: $(-1, 5, 2)$.)
- 3.27. $\mathbf{a} = (4, 5, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 3, 1)$, $\mathbf{c} = (-3, -6, 7)$, $\mathbf{d} =$
 $= (19, 33, 0)$. (Ответ: $(3, 4, -1)$.)
- 3.28. $\mathbf{a} = (1, -3, 1)$, $\mathbf{b} = (-2, -4, 3)$, $\mathbf{c} = (0, -2, 3)$,
 $\mathbf{d} = (-8, -10, 13)$. (Ответ: $(-2, 3, 2)$.)

3.29. $\mathbf{a} = (5, 7, -2)$, $\mathbf{b} = (-3, 1, 3)$, $\mathbf{c} = (1, -4, 6)$,
 $\mathbf{d} = (14, 9, -1)$. (Ответ: $(2, -1, 1)$.)

3.30. $\mathbf{a} = (-1, 4, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 2, -4)$, $\mathbf{c} = (-2, -7, 1)$,
 $\mathbf{d} = (6, 20, -3)$. (Ответ: $(1, 1, -2)$.)

Решение типового варианта

1. Даны векторы $\mathbf{a} = -\mathbf{m} + 6\mathbf{n}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$, где
 $|\mathbf{m}| = 2$; $|\mathbf{n}| = 5$; $(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) = 2\pi/3$. Найти: а) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$;
 б) $\text{пр}_{\mathbf{b}}(4\mathbf{a} - 5\mathbf{b})$; в) $\cos(2\widehat{\mathbf{b} - \mathbf{a}, 4\mathbf{b}})$.

► а) Вычисляем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (-\mathbf{m} + 6\mathbf{n}) \cdot (3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}) = \\ &= -3\mathbf{m}^2 + 14|\mathbf{m}||\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) + 24\mathbf{n}^2 = \\ &= -3 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 \cdot 5(-1/2) + 24 \cdot 5^2 = 518; \end{aligned}$$

б) Пусть $\mathbf{c} = 4\mathbf{a} - 5\mathbf{b} = -19\mathbf{m} + 4\mathbf{n}$. Тогда

$$\text{пр}_{\mathbf{b}} \mathbf{c} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} &= (-19\mathbf{m} + 4\mathbf{n}) \cdot (3\mathbf{m} + 4\mathbf{n}) = \\ &= -57\mathbf{m}^2 - 64|\mathbf{m}||\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) + 16\mathbf{n}^2 = -148, \\ |\mathbf{b}| &= \sqrt{\mathbf{b}^2} = \sqrt{(3\mathbf{m} + 4\mathbf{n})^2} = \\ &= \sqrt{9\mathbf{m}^2 + 24|\mathbf{m}||\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) + 16\mathbf{n}^2} = \sqrt{316}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\text{пр}_{\mathbf{b}}(4\mathbf{a} - 5\mathbf{b}) = -148/\sqrt{316};$$

в) Пусть $\mathbf{d} = 2\mathbf{b} - \mathbf{a} = 7\mathbf{m} + 2\mathbf{n}$, $\mathbf{e} = 4\mathbf{b} = 12\mathbf{m} + 16\mathbf{n}$.
 Тогда

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\mathbf{d}, \mathbf{e}}) &= \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{d}||\mathbf{e}|}, \\ \mathbf{d} \cdot \mathbf{e} &= (7\mathbf{m} + 2\mathbf{n}) \cdot (12\mathbf{m} + 16\mathbf{n}) = \\ &= 84\mathbf{m}^2 + 136|\mathbf{m}||\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) + 32\mathbf{n}^2 = 456, \\ |\mathbf{d}| &= \sqrt{(7\mathbf{m} + 2\mathbf{n})^2} = \\ &= \sqrt{49\mathbf{m}^2 + 28|\mathbf{m}||\mathbf{n}|\cos(\widehat{\mathbf{m}, \mathbf{n}}) + 4\mathbf{n}^2} = \sqrt{156}, \\ |\mathbf{e}| &= \sqrt{(12\mathbf{m} + 16\mathbf{n})^2} = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{144m^2 + 384|m||n|\cos(\widehat{m, n}) + 256n^2} = \sqrt{5056}.$$

В результате имеем:

$$\cos(2b - \widehat{a, 4b}) = 456/\sqrt{788736} \approx 0,5. \blacktriangleleft$$

2. По координатам точек $A(-5, 1, 6)$, $B(1, 4, 3)$ и $C(6, 3, 9)$ найти: а) модуль вектора $\mathbf{a} = 4\vec{AB} + \vec{BC}$; б) скалярное произведение векторов \mathbf{a} и $\mathbf{b} = \vec{BC}$; в) проекцию вектора $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{d} = \vec{AB}$; г) координаты точки M , делящей отрезок $l = AB$ в отношении 1:3.

► а) Последовательно находим $\vec{AB} = (6, 3, -3)$, $\vec{BC} = (5, -1, 6)$, $4\vec{AB} + \vec{BC} = (29, 11, -6)$,

$$|4\vec{AB} + \vec{BC}| = \sqrt{29^2 + 11^2 + (-6)^2} = \sqrt{998};$$

б) Имеем $\mathbf{a} = (29, 11, -6)$, $\mathbf{b} = (5, -1, 6)$. Тогда

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 29 \cdot 5 + 11(-1) + (-6)6 = 98;$$

в) Так как

$$\text{пр}_{\mathbf{d}} \mathbf{c} = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}, \quad \mathbf{d} = (6, 3, -3),$$

то $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = 30 - 3 - 18 = 9$, $|\mathbf{d}| = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54}$,

$$\text{пр}_{\vec{AB}} \vec{BC} = 9/\sqrt{54};$$

г) Имеем: $\lambda = 1/3$, $\mathbf{r}_M = \frac{\mathbf{r}_A + \lambda \mathbf{r}_B}{1 + \lambda}$. Следовательно,

$$x_M = \frac{-5 + 1/3 \cdot 1}{1 + 1/3} = -\frac{7}{2}, \quad y_M = \frac{1 + 4 \cdot 1/3}{1 + 1/3} = \frac{7}{4},$$

$$z_M = \frac{6 + 1/3 \cdot 3}{1 + 1/3} = \frac{21}{4}, \quad M(-7/2, 7/4, 21/4). \blacktriangleleft$$

3. Доказать, что векторы $\mathbf{a} = (3, -1, 0)$, $\mathbf{b} = (2, 3, 1)$, $\mathbf{c} = (-1, 4, 3)$ образуют базис, и найти координаты вектора $\mathbf{d} = (2, 3, 7)$ в этом базисе.

► Вычисляем

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0.$$

Следовательно, векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} образуют базис, и вектор \mathbf{d} линейно выражается через базисные векторы:

$$\mathbf{d} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}$$

или в координатной форме

$$\left. \begin{aligned} 3\alpha + 2\beta - \gamma &= 2, \\ -\alpha + 3\beta + 4\gamma &= 3, \\ \beta + 3\gamma &= 7. \end{aligned} \right\}$$

Решаем полученную систему по формулам Крамера. Находим: $\Delta = 22$,

$$\Delta(\alpha) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 66, \quad \Delta(\beta) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -44,$$

$$\Delta(\gamma) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 66,$$

$$\alpha = \Delta(\alpha)/\Delta = 3, \quad \beta = \Delta(\beta)/\Delta = -2, \quad \gamma = \Delta(\gamma)/\Delta = 3,$$

поэтому $\mathbf{d} = (3, -2, 3) = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$. ◀

ИДЗ-2.2

1. Даны векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} . Необходимо: а) вычислить смешанное произведение трех векторов; б) найти модуль векторного произведения; в) вычислить скалярное произведение двух векторов; г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны два вектора; д) проверить, будут ли компланарны три вектора.

1.1. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; а) \mathbf{a} , $3\mathbf{b}$, \mathbf{c} ; б) $3\mathbf{a}$, $2\mathbf{c}$; в) \mathbf{b} , $-4\mathbf{c}$; г) \mathbf{a} , \mathbf{c} ; д) \mathbf{a} , $2\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$.

(Ответ: а) -261 ; б) $\sqrt{19116}$; в) 40 .)

1.2. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 21\mathbf{k}$; а) $5\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, \mathbf{c} ; б) $4\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$; в) \mathbf{a} , \mathbf{c} ; г) \mathbf{b} , \mathbf{c} ; д) $2\mathbf{a}$, $-3\mathbf{b}$, \mathbf{c} .

(Ответ: а) 0 ; б) 0 ; в) 6 .)

1.3. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$; а) \mathbf{a} , $2\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; б) $3\mathbf{a}$, $-7\mathbf{b}$; в) \mathbf{c} , $-2\mathbf{a}$; г) \mathbf{a} , \mathbf{c} ; д) $3\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$.

(Ответ: а) -1840 ; б) $\sqrt{612108}$; в) 0 .)

1.4. $\mathbf{a} = -7\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; а) \mathbf{a} , $-2\mathbf{b}$, $-7\mathbf{c}$; б) $4\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$; в) $2\mathbf{a}$, $-7\mathbf{c}$; г) \mathbf{b} , \mathbf{c} ; д) $2\mathbf{a}$, $4\mathbf{b}$, $3\mathbf{c}$. (Ответ: а) 0 ; б) 0 ; в) 42 .)

1.5. $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$;

а) $a, 6b, 3c$; б) $2b, a$; в) $a, -4c$; г) a, b ; д) $a, 6b, 3c$.

(Ответ: а) -2538 ; б) $\sqrt{3192}$; в) 12 .)

1.6. $a = 3i - 2j + k, b = 2j - 3k, c = -3i + 2j - k$;

а) $a, -3b, 2c$; б) $5a, 3c$; в) $-2a, 4b$; г) a, c ; д) $5a, 4b, 3c$. (Ответ: а) 0 ; б) 0 ; в) 56 .)

1.7. $a = 4i - j + 3k, b = 2i + 3j - 5k, c = 7i + 2j + 4k$;

а) $7a, -4b, 2c$; б) $3a, 5c$; в) $2b, 4c$; г) b, c ; д) $7a, 2b, 5c$.

(Ответ: а) -4480 ; б) $\sqrt{78750}$; в) 0 .)

1.8. $a = 4i + 2j - 3k, b = 2i + k, c = -12i - 6j + 9k$;

а) $2a, 3b, c$; б) $4a, 3b$; в) $b, -4c$; г) a, c ; д) $2a, 3b, -4c$.

(Ответ: а) 0 ; б) $\sqrt{17280}$; в) 60 .)

1.9. $a = -i + 5k, b = -3i + 2j + 2k, c = -2i - 4j + k$;

а) $3a, -4b, 2c$; б) $7a, -3c$; в) $2b, 3a$; г) b, c ; д) $7a, 2b, -3c$. (Ответ: а) -1680 ; б) $\sqrt{219177}$; в) 78 .)

1.10. $a = 6i - 4j + 6k, b = 9i - 6j + 9k, c = i - 8k$;

а) $2a, -4b, 3c$; б) $3b, -9c$; в) $3a, -5c$; г) a, b ; д) $3a, -4b, -9c$. (Ответ: а) 0 ; б) $\sqrt{6488829}$; в) 630 .)

1.11. $a = 5i - 3j + 4k, b = 2i - 4j - 2k, c = 3i + 5j - 7k$;

а) $a, -4b, 2c$; б) $-2b, 4c$; в) $-3a, 6c$; г) b, c ; д) $a, -2b, 6c$. (Ответ: а) -464 ; б) $\sqrt{127488}$; в) 504 .)

1.12. $a = -4i + 3j - 7k, b = 4i + 6j - 2k, c = 6i + 9j - 3k$;

а) $-2a, b, -2c$; б) $4b, 7c$; в) $5a, -3b$; г) b, c ; д) $-2a, 4b, 7c$. (Ответ: а) 0 ; б) 0 ; в) -240 .)

1.13. $a = -5i + 2j - 2k, b = 7i - 5k, c = 2i + 3j - 2k$;

а) $2a, 4b, -5c$; б) $-3b, 11c$; в) $8a, -6c$; г) a, c ; д) $8a, -3b, 11c$. (Ответ: а) 4360 ; б) $33\sqrt{682}$; в) 0 .)

1.14. $a = -4i - 6j + 2k, b = 2i + 3j - k, c = -i + 5j - 3k$;

а) $5a, 7b, 2c$; б) $-4b, 11a$; в) $3a, -7c$; г) a, b ; д) $3a, 7b, -2c$. (Ответ: а) 0 ; б) 0 ; в) 672 .)

1.15. $a = -4i + 2j - 3k, b = -3j + 5k, c = 6i + 6j - 4k$;

а) $5a, -b, 3c$; б) $-7a, 4c$; в) $3a, 9b$; г) a, c ; д) $3a, -9b, 4c$. (Ответ: а) -1170 ; б) $56\sqrt{638}$; в) 567 .)

1.16. $a = -3i + 8j, b = 2i + 3j - 2k, c = 8i + 12j - 8k$;

а) $4a, -6b, 5c$; б) $-7a, 9c$; в) $3b, -8c$; г) b, c ; д) $4a, -6b, 9c$. (Ответ: а) 0 ; б) $252\sqrt{917}$; в) -1632 .)

1.17. $a = 2i - 4j - 2k, b = -9i + 2k, c = 3i + 5j - 7k$;

а) $7a, 5b, -c$; б) $-5a, 4b$; в) $3b, -8c$; г) a, c ; д) $7a, 5b, -c$. (Ответ: а) -10430 ; б) $\sqrt{40389}$; в) 984 .)

1.18. $a = 9i - 3j + k, b = 3i - 15j + 21k, c = i - 5j +$

- + 7k; а) 2a, -7b, 3c; б) -6a, 4c; в) 5b, 7a; г) b, c;
- д) 2a, -7b, 4c. (Ответ: а) 0; б) $\sqrt{3365604}$; в) 3255.)
- 1.19. $a = -2i + 4j - 3k$, $b = 5i + j - 2k$, $c = 7i + 4j - k$; а) a, -6b, 2c; б) -8b, 5c; в) -9a, 7c; г) a, b;
- д) a, -6b, 5c. (Ответ: а) 1068; б) $\sqrt{478400}$; в) -315.)
- 1.20. $a = -9i + 4j - 5k$, $b = i - 2j + 4k$, $c = -5i + 10j - 20k$; а) -2a, 7b, 5c; б) -6b, 7c; в) 9a, 4c;
- г) b, c; д) -2a, 7b, 4c. (Ответ: а) 0; б) $\sqrt{52611300}$; в) 6660.)
- 1.21. $a = 2i - 7j + 5k$, $b = -i + 2j - 6k$, $c = 3i + 2j - 4k$; а) -3a, 6b, -c; б) 5b, 3c; в) 7a, -4b; г) b, c;
- д) 7a, -4b, 3c. (Ответ: а) 2196; б) $\sqrt{126900}$; в) 1288.)
- 1.22. $a = 7i - 4j - 5k$, $b = i - 11j + 3k$, $c = 5i + 5j + 3k$; а) 3a, -7b, 2c; б) 2b, 6c; в) -4a, -5c; г) a, c;
- д) -4a, 2b, 6c. (Ответ: а) 28728; б) $\sqrt{870912}$; в) 0.)
- 1.23. $a = 4i - 6j - 2k$, $b = -2i + 3j + k$, $c = 3i - 5j + 7k$; а) 6a, 3b, 8c; б) -7b, 6a; в) -5a, 4c; г) a, b;
- д) -5a, 3b, 4c. (Ответ: а) 0; б) 0; в) -560.)
- 1.24. $a = 3i - j + 2k$, $b = -i + 5j - 4k$, $c = 6i - 2j + 4k$; а) 4a, -7b, -2c; б) 6a, -4c; в) -2a, 5b; г) a, c;
- д) 6a, -7b, -2c. (Ответ: а) 0; б) 0; в) 160.)
- 1.25. $a = -3i - j - 5k$, $b = 2i - 4j + 8k$, $c = 3i + 7j - k$; а) 2a, -b, 3c; б) -9a, 4c; в) 5b, -6c; г) b, c; д) 2a, 5b, -6c. (Ответ: а) 0; б) $\sqrt{2519424}$; в) 900.)
- 1.26. $a = -3i + 2j + 7k$, $b = i - 5k$, $c = 6i + 4j - k$; а) -2a, b, 7c; б) 5a, -2c; в) 3b, c; г) a, c; д) -2a, 3b, 7c. (Ответ: а) 1260; б) $10\sqrt{2997}$; в) 33.)
- 1.27. $a = 3i - j + 5k$, $b = 2i - 4j + 6k$, $c = i - 2j + 3k$; а) -3a, 4b, -5c; б) 6b, 3c; в) a, 4c; г) b, c; д) -3a, 4b, -5c. (Ответ: а) 0; б) 0; в) 80.)
- 1.28. $a = 4i - 5j - 4k$, $b = 5i - j$, $c = 2i + 4j - 3k$; а) a, 7b, -2c; б) -5a, 4b; в) 8c, -3a; г) a, c; д) -3a, 4b, 8c. (Ответ: а) 2114; б) $20\sqrt{857}$; в) 0.)
- 1.29. $a = -9i + 4k$, $b = 2i - 4j + 6k$, $c = 3i - 6j + 9k$; а) 3a, -5b, -4c; б) 6b, 2c; в) -2a, 8c; г) b, c; д) 3a, 6b, -4c. (Ответ: а) 0; б) 0; в) -144.)
- 1.30. $a = 5i - 6j - 4k$, $b = 4i + 8j - 7k$, $c = 3j - 4k$; а) 5a, 3b, -4c; б) 4b, a; в) 7a, -2c; г) a, b; д) 5a, 4b, -2c. (Ответ: а) 11940; б) $4\sqrt{9933}$; в) 28.)

2. Вершины пирамиды находятся в точках A , B , C и D . Вычислить: а) площадь указанной грани; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра l и две вершины пирамиды; в) объем пирамиды $ABCD$.

2.1. $A(3, 4, 5)$, $B(1, 2, 1)$, $C(-2, -3, 6)$, $D(3, -6, -3)$;

а) ACD ; б) $l = AB$, C и D . (Ответ: а) $\sqrt{2114}$; б) $\sqrt{4426/2}$; в) 42.)

2.2. $A(-7, -5, 6)$, $B(-2, 5, -3)$, $C(3, -2, 4)$, $D(1, 2, 2)$; а) BCD ; б) $l = CD$, A и B . (Ответ: а) $\sqrt{1350}$;

б) $\sqrt{8937/2}$; в) $77/3$.)

2.3. $A(1, 3, 1)$, $B(-1, 4, 6)$, $C(-2, -3, 4)$, $D(3, 4, -4)$; а) ACD ; б) $l = BC$, A и D . (Ответ: а) $\sqrt{891/2}$;

б) $3\sqrt{2/2}$; в) 3.)

2.4. $A(2, 4, 1)$, $B(-3, -2, 4)$, $C(3, 5, -2)$, $D(4, 2, -3)$;

а) ABD ; б) $l = AC$, B и D . (Ответ: а) $\sqrt{395}$; б) $\sqrt{205/2}$; в) $25/3$.)

2.5. $A(-5, -3, -4)$, $B(1, 4, 6)$, $C(3, 2, -2)$, $D(8, -2, 4)$; а) ACD ; б) $l = BC$, A и D . (Ответ: а) $\sqrt{6137/2}$;

б) $\sqrt{7289/2}$; в) $304/3$.)

2.6. $A(3, 4, 2)$, $B(-2, 3, -5)$, $C(4, -3, 6)$, $D(6, -5, 3)$;

а) ABD ; б) $l = BD$, A и C . (Ответ: а) $8\sqrt{26}$; б) $\sqrt{1826/2}$; в) 40.)

2.7. $A(-4, 6, 3)$, $B(3, -5, 1)$, $C(2, 6, -4)$, $D(2, 4, -5)$; а) ACD ; б) $l = AD$, B и C . (Ответ: а) $\sqrt{94}$;

б) $\sqrt{1554/2}$; в) $100/3$.)

2.8. $A(7, 5, 8)$, $B(-4, -5, 3)$, $C(2, -3, 5)$, $D(5, 1, -4)$;

а) BCD ; б) $l = BC$, A и D . (Ответ: а) $\sqrt{1150}$; б) $\sqrt{4101}$; в) $202/3$.)

2.9. $A(3, -2, 6)$, $B(-6, -2, 3)$, $C(1, 1, -4)$, $D(4, 6, -7)$; а) ABD ; б) $l = BD$, A и C . (Ответ: а) $\sqrt{5040}$;

б) $\sqrt{212}$; в) 52.)

2.10. $A(-5, -4, -3)$, $B(7, 3, -1)$, $C(6, -2, 0)$,

$D(3, 2, -7)$; а) BCD ; б) $l = AD$, B и C . (Ответ: а) $\sqrt{1422/2}$; б) $\sqrt{504}$; в) 44.)

2.11. $A(3, -5, -2)$, $B(-4, 2, 3)$, $C(1, 5, 7)$, $D(-2,$

—4, 5); а) ACD ; б) $l=BD$, A и C . (Ответ: а) $\sqrt{6986/2}$;
б) $\sqrt{1261}$; в) $202/3$.)

2.12. $A(7, 4, 9)$, $B(1, -2, -3)$, $C(-5, -3, 0)$, $D(1, -3, 4)$; а) ABD ; б) $l=AB$, C и D . (Ответ: а) $\sqrt{1179}$;
б) 17 ; в) 50 .)

2.13. $A(-4, -7, -3)$, $B(-4, -5, 7)$, $C(2, -3, 3)$,
 $D(3, 2, 1)$; а) BCD ; б) $l=BC$, A и D . (Ответ: а) $\sqrt{276}$;
б) $\sqrt{1393}$; в) $148/3$.)

2.14. $A(-4, -5, -3)$, $B(3, 1, 2)$, $C(5, 7, -6)$, $D(6, -1, 5)$; а) ACD ; б) $l=BC$, A и D . (Ответ: а) $\sqrt{7281}$;
б) $\sqrt{2726}$; в) 46 .)

2.15. $A(5, 2, 4)$, $B(-3, 5, -7)$, $C(1, -5, 8)$, $D(9, -3, 5)$; а) ABD ; б) $l=BD$, A и C . (Ответ: а) $2\sqrt{266}$;
б) $\sqrt{1405/2}$; в) $286/3$.)

2.16. $A(-6, 4, 5)$, $B(5, -7, 3)$, $C(4, 2, -8)$, $D(2, 8, -3)$; а) ACD ; б) $l=AD$, B и C . (Ответ: а) $2\sqrt{251}$;
б) $25\sqrt{38/2}$; в) 150 .)

2.17. $A(5, 3, 6)$, $B(-3, -4, 4)$, $C(5, -6, 8)$, $D(4, 0, -3)$;
а) BCD ; б) $l=BC$, A и D . (Ответ: а) $\sqrt{2294}$; б) $2\sqrt{406}$;
в) $332/3$.)

2.18. $A(5, -4, 4)$, $B(-4, -6, 5)$, $C(3, 2, -7)$, $D(6, 2, -9)$; а) ABD ; б) $l=BD$, A и C . (Ответ: а) $\sqrt{4140}$;
б) $\sqrt{405}$; в) $82/3$.)

2.19. $A(-7, -6, -5)$, $B(5, 1, -3)$, $C(8, -4, 0)$,
 $D(3, 4, -7)$; а) BCD ; б) $l=AD$, B и C . (Ответ: а) $\sqrt{158/2}$;
б) $\sqrt{2266/2}$; в) $86/3$.)

2.20. $A(7, -1, -2)$, $B(1, 7, 8)$, $C(3, 7, 9)$, $D(-3, -5, 2)$; а) ACD ; б) $l=BD$, A и C . (Ответ: а) $\sqrt{5957}$;
б) $\sqrt{1361}$; в) $124/3$.)

2.21. $A(5, 2, 7)$, $B(7, -6, -9)$, $C(-7, -6, 3)$, $D(1, -5, 2)$; а) ABD ; б) $l=AB$, C и D . (Ответ: а) $\sqrt{3194}$;
б) $19\sqrt{2/2}$; в) 76 .)

2.22. $A(-2, -5, -1)$, $B(-6, -7, 9)$, $C(4, -5, 1)$,

$D(2, 1, 4)$; а) BCD ; б) $l = BC$, A и D . (Ответ: а) $\sqrt{1802}$;
б) $\sqrt{2142}/2$; в) $226/3$.)

2.23. $A(-6, -3, -5)$, $B(5, 1, 7)$, $C(3, 5, -1)$, $D(4, -2, 9)$; а) ACD ; б) $l = BC$, A и D . (Ответ: а) $\sqrt{24101}/2$;
б) $\sqrt{2969}$; в) $4/3$.)

2.24. $A(7, 4, 2)$, $B(-5, 3, -9)$, $C(1, -5, 3)$, $D(7, -9, 1)$;
а) ABD ; б) $l = BD$, A и C . (Ответ: а) $\sqrt{11161}$; б) $\sqrt{5629}/2$;
в) 186 .)

2.25. $A(-8, 2, 7)$, $B(3, -5, 9)$, $C(2, 4, -6)$, $D(4, 6, -5)$;
а) ACD ; б) $l = AD$, B и C . (Ответ: а) $\sqrt{584}$; б) $\sqrt{9754}/2$;
в) $296/3$.)

2.26. $A(4, 3, 1)$, $B(2, 7, 5)$, $C(-4, -2, 4)$, $D(2, -3, -5)$; а) ACD ; б) $l = AB$, C и D . (Ответ: а) $\sqrt{1666}$;
б) $\sqrt{9746}/2$; в) $80/3$.)

2.27. $A(-9, -7, 4)$, $B(-4, 3, -1)$, $C(5, -4, 2)$,
 $D(3, 4, 4)$; а) BCD ; б) $l = CD$, A и B . (Ответ: а) $\sqrt{1346}$;
б) $\sqrt{13250}/2$; в) 120 .)

2.28. $A(3, 5, 3)$, $B(-3, 2, 8)$, $C(-3, -2, 6)$, $D(7, 8, -2)$; а) ACD ; б) $l = BD$, A и C . (Ответ: а) $\sqrt{785}/2$;
б) $\sqrt{58}/2$; в) $26/3$.)

2.29. $A(4, 2, 3)$, $B(-5, -4, 2)$, $C(5, 7, -4)$, $D(6, 4, -7)$;
а) ABD ; б) $l = AD$, B и C . (Ответ: а) $\sqrt{3086}$; б) $\sqrt{501}$;
в) $178/3$.)

2.30. $A(-4, -2, -3)$, $B(2, 5, 7)$, $C(6, 3, -1)$, $D(6, -4, 1)$; а) ACD ; б) $l = BC$, A и D . (Ответ: а) $\sqrt{1469}$;
б) $\sqrt{1964}$; в) 116 .)

3. Сила \mathbf{F} приложена к точке A . Вычислить: а) работу силы \mathbf{F} в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B ; б) модуль момента силы \mathbf{F} относительно точки B .

3.1. $\mathbf{F} = (5, -3, 9)$, $A(3, 4, -6)$, $B(2, 6, 5)$. (Ответ: а) 88 ; б) $\sqrt{6746}$.)

3.2. $\mathbf{F} = (-3, 1, -9)$, $A(6, -3, 5)$, $B(9, 5, -7)$. (Ответ: а) 107 ; б) $\sqrt{8298}$.)

3.3. $\mathbf{F} = (2, 19, -4)$, $A(5, 3, 4)$, $B(6, -4, -1)$. (Ответ: а) 111; б) $\sqrt{16\,254}$.)

3.4. $\mathbf{F} = (-4, 5, -7)$, $A(4, -2, 3)$, $B(7, 0, -3)$. (Ответ: а) 40; б) $\sqrt{2810}$.)

3.5. $\mathbf{F} = (4, 11, -6)$, $A(3, 5, 1)$, $B(4, -2, -3)$. (Ответ: а) 49; б) $\sqrt{9017}$.)

3.6. $\mathbf{F} = (3, -5, 7)$, $A(2, 3, -5)$, $B(0, 4, 3)$. (Ответ: а) 45; б) $\sqrt{2819}$.)

3.7. $\mathbf{F} = (5, 4, 11)$, $A(6, 1, -5)$, $B(4, 2, -6)$. (Ответ: а) 17; б) $\sqrt{683}$.)

3.8. $\mathbf{F} = (-9, 5, 7)$, $A(1, 6, -3)$, $B(4, -3, 5)$. (Ответ: а) 16; б) $\sqrt{23\,614}$.)

3.9. $\mathbf{F} = (6, 5, -7)$, $A(7, -6, 4)$, $B(4, 9, -6)$. (Ответ: а) 127; б) $\sqrt{20\,611}$.)

3.10. $\mathbf{F} = (-5, 4, 4)$, $A(3, 7, -5)$, $B(2, -4, 1)$. (Ответ: а) 15; б) $\sqrt{8781}$.)

3.11. $\mathbf{F} = (4, 7, -3)$, $A(5, -4, 2)$, $B(8, 5, -4)$. (Ответ: а) 93; б) $15\sqrt{3}$.)

3.12. $\mathbf{F} = (2, 2, 9)$, $A(4, 2, -3)$, $B(2, 4, 0)$. (Ответ: а) 27; б) 28.)

Даны три силы \mathbf{P} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , приложенные к точке A . Вычислить: а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B ; б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B .

3.13. $\mathbf{P} = (9, -3, 4)$, $\mathbf{Q} = (5, 6, -2)$, $\mathbf{R} = (-4, -2, 7)$, $A(-5, 4, -2)$, $B(4, 6, -5)$. (Ответ: а) 65; б) $\sqrt{12\,883}$.)

3.14. $\mathbf{P} = (5, -2, 3)$, $\mathbf{Q} = (4, 5, -3)$, $\mathbf{R} = (-1, -3, 6)$, $A(7, 1, -5)$, $B(2, -3, -6)$. (Ответ: а) 46; б) $2\sqrt{521}$.)

3.15. $\mathbf{P} = (3, -5, 4)$, $\mathbf{Q} = (5, 6, -3)$, $\mathbf{R} = (-7, -1, 8)$, $A(-3, 5, 9)$, $B(5, 6, -3)$. (Ответ: а) 100; б) $\sqrt{1306}$.)

3.16. $\mathbf{P} = (-10, 6, 5)$, $\mathbf{Q} = (4, -9, 7)$, $\mathbf{R} = (5, 3, -3)$, $A(4, -5, 9)$, $B(4, 7, -5)$. (Ответ: а) 126; б) $2\sqrt{3001}$.)

3.17. $\mathbf{P} = (5, -3, 1)$, $\mathbf{Q} = (4, 2, -6)$, $\mathbf{R} = (-5, -3, 7)$, $A(-5, 3, 7)$, $B(3, 8, -5)$. (Ответ: а) 4; б) $\sqrt{12\,389}$.)

- 3.18. $\mathbf{P} = (-5, 8, 4)$, $\mathbf{Q} = (6, -7, 3)$, $\mathbf{R} = (3, 1, -5)$,
 $A(2, -4, 7)$, $B(0, 7, 4)$. (Ответ: а) 8; б) $4\sqrt{197}$.)
- 3.19. $\mathbf{P} = (7, -5, 2)$, $\mathbf{Q} = (3, 4, -8)$, $\mathbf{R} = (-2, -4, 3)$,
 $A(-3, 2, 0)$, $B(6, 4, -3)$. (Ответ: а) 71; б) $\sqrt{4171}$.)
- 3.20. $\mathbf{P} = (3, -4, 2)$, $\mathbf{Q} = (2, 3, -5)$, $\mathbf{R} = (-3, -2, 4)$,
 $A(5, 3, -7)$, $B(4, -1, -4)$. (Ответ: а) 13; б) $\sqrt{195}$.)
- 3.21. $\mathbf{P} = (4, -2, -5)$, $\mathbf{Q} = (5, 1, -3)$, $\mathbf{R} = (-6, 2, 5)$,
 $A(-3, 2, -6)$, $B(4, 5, -3)$. (Ответ: а) 15; б) $2\sqrt{262}$.)
- 3.22. $\mathbf{P} = (7, 3, -4)$, $\mathbf{Q} = (9, -4, 2)$, $\mathbf{R} = (-6, 1, 4)$,
 $A(-7, 2, 5)$, $B(4, -2, 11)$. (Ответ: а) 122; б) $\sqrt{3108}$.)
- 3.23. $\mathbf{P} = (9, -4, 4)$, $\mathbf{Q} = (-4, 6, -3)$, $\mathbf{R} = (3, 4, 2)$,
 $A(5, -4, 3)$, $B(4, -5, 9)$. (Ответ: а) 4; б) $\sqrt{4126}$.)
- 3.24. $\mathbf{P} = (6, -4, 5)$, $\mathbf{Q} = (-4, 7, 8)$, $\mathbf{R} = (5, 1, -3)$,
 $A(-5, -4, 2)$, $B(7, -3, 6)$. (Ответ: а) 128; б) $\sqrt{10181}$.)
- 3.25. $\mathbf{P} = (5, 5, -6)$, $\mathbf{Q} = (7, -6, 6)$, $\mathbf{R} = (-4, 3, 4)$,
 $A(-9, 4, 7)$, $B(8, -1, 7)$. (Ответ: а) 126; б) $10\sqrt{105}$.)
- 3.26. $\mathbf{P} = (7, -6, 2)$, $\mathbf{Q} = (-6, 2, -1)$, $\mathbf{R} = (1, 6, 4)$,
 $A(3, -6, 1)$, $B(6, -2, 7)$. (Ответ: а) 44; б) $\sqrt{77}$.)
- 3.27. $\mathbf{P} = (4, -2, 3)$, $\mathbf{Q} = (-2, 5, 6)$, $\mathbf{R} = (7, 3, -1)$,
 $A(-3, -2, 5)$, $B(9, -5, 4)$. (Ответ: а) 82; б) $\sqrt{21150}$.)
- 3.28. $\mathbf{P} = (7, 3, -4)$, $\mathbf{Q} = (3, -2, 2)$, $\mathbf{R} = (-5, 4, 3)$,
 $A(-5, 0, 4)$, $B(4, -3, 5)$. (Ответ: а) 31; б) $4\sqrt{230}$.)
- 3.29. $\mathbf{P} = (3, -2, 4)$, $\mathbf{Q} = (-4, 4, -3)$, $\mathbf{R} = (3, 4, 2)$,
 $A(1, -4, 3)$, $B(4, 0, -2)$. (Ответ: а) 15; б) $5\sqrt{89}$.)
- 3.30. $\mathbf{P} = (2, -1, -3)$, $\mathbf{Q} = (3, 2, -1)$, $\mathbf{R} = (-4, 1, 3)$,
 $A(-1, 4, -2)$, $B(2, 3, -1)$. (Ответ: а) 0; б) $\sqrt{66}$.)

Решение типового варианта

1. Даны векторы $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ и $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Необходимо: а) вычислить произведение векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} и $5\mathbf{c}$; б) найти модуль векторного произведения $3\mathbf{c}$ и \mathbf{b} ; в) вычислить скалярное произведение векторов \mathbf{a} и $3\mathbf{b}$; г) проверить, будут ли коллинеарны или ортогональны векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} ; д) проверить, будут ли компланарны векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} .

► а) Так как $5\mathbf{c} = 15\mathbf{i} + 25\mathbf{j}$, то

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot 5\mathbf{c} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 15 & 25 & 0 \end{vmatrix} = -100 - 180 - 200 = -480;$$

б) Поскольку $3\mathbf{c} = 9\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$, то

$$3\mathbf{c} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 9 & 15 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 30\mathbf{i} + 27\mathbf{k} + 15\mathbf{k} - 18\mathbf{j} = \\ = 30\mathbf{i} - 18\mathbf{j} + 42\mathbf{k},$$

$$|3\mathbf{c} \times \mathbf{b}| = \sqrt{30^2 + (-18)^2 + 42^2} = \sqrt{2988};$$

в) Находим: $3\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{a} \cdot 3\mathbf{b} = 4(-3) + 0 \cdot 9 + 4 \cdot 6 = 12$;

г) Так как $\mathbf{a} = (4, 0, 4)$, $\mathbf{b} = (-1, 3, 2)$ и $\frac{4}{-1} \neq \frac{0}{3} \neq \frac{4}{2}$, то векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} не коллинеарны. Поскольку

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4(-1) + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \neq 0,$$

то векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} не ортогональны;

д) векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} компланарны, если $\mathbf{abc} = 0$. Вычисляем

$$\mathbf{abc} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -20 - 36 - 40 \neq 0,$$

т. е. векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} не компланарны. ◀

2. Вершины пирамиды находятся в точках $A(2, 3, 4)$, $B(4, 7, 3)$, $C(1, 2, 2)$ и $D(-2, 0, -1)$. Вычислить: а) площадь грани ABC ; б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB , AC , AD ; в) объем пирамиды $ABCD$.

► а) Известно, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Находим: $\overrightarrow{AB} = (2, 4, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, -1, -2)$,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -9\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Окончательно имеем:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{9^2 + 5^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{110};$$

б) Середины ребер AB , BC и AD находятся в точках $K(3; 5; 3,5)$, $M(1,5; 2,5; 3)$, $N(0; 1,5; 1,5)$. Далее имеем:

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} |\vec{KM} \times \vec{KN}|, \quad \vec{KM} = (-1,5; -2,5; -0,5),$$

$$\vec{KN} = (-3; -3,5; -2),$$

$$\vec{KM} \times \vec{KN} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1,5 & -2,5 & -0,5 \\ -3 & -3,5 & -2 \end{vmatrix} = 3,25\mathbf{i} - 1,5\mathbf{j} - 2,25\mathbf{k},$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} \sqrt{3,25^2 + 1,5^2 + 2,25^2} = \frac{1}{2} \sqrt{17,875};$$

в) Поскольку $V_{\text{пар}} = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|$, $\vec{AD} = (-4, -3, -5)$,

$$(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 11,$$

то $V = 11/6$. ◀

3. Сила $\mathbf{F} = (2, 3, -5)$ приложена к точке $A(1, -2, 2)$. Вычислить: а) работу силы \mathbf{F} в случае, когда точка ее положения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(1, 4, 0)$; б) модуль момента силы \mathbf{F} относительно точки B .

► а) Так как $A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$, $\mathbf{s} = \vec{AB} = (0, 6, -2)$, то

$$\mathbf{F} \cdot \vec{AB} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 6 + (-5)(-2) = 28, \quad A = 28;$$

б) Момент силы $\mathbf{M} = \vec{BA} \times \mathbf{F}$, $\vec{BA} = (0, -6, 2)$,

$$\vec{BA} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 24\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}.$$

Следовательно, $|\mathbf{M}| = \sqrt{24^2 + 4^2 + 12^2} = 4\sqrt{46}$. ◀

2.5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 2

1. Даны три вектора: $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Найти вектор \mathbf{x} , удовлетворяющий следующим условиям: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = -5$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{b} = -11$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = 20$. (Ответ: $\mathbf{x} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.)

2. Вектор \mathbf{x} , перпендикулярный к оси Oz и вектору $\mathbf{a} = (8, -15, 3)$, образует острый угол с осью Ox . Зная, что $|\mathbf{x}| = 51$, найти координаты \mathbf{x} . (Ответ: $\mathbf{x} = (45, 24, 0)$.)

3. Два трактора, идущие с постоянной скоростью по берегам прямого канала, тянут барку при помощи двух канатов. Силы натяжения канатов $|\mathbf{F}_1| = 800$ Н и $|\mathbf{F}_2| = 960$ Н, угол между канатами равен 60° . Определить сопротивление воды, испытываемое баркой, если она движется параллельно берегам, и углы α , β между канатами и направлением движения. (Ответ: $|\mathbf{s}| \approx 1530$ Н, $\alpha \approx 33^\circ$, $\beta \approx 27^\circ$.)

4. Даны три силы $\mathbf{F} = (2, -1, -3)$, $\mathbf{Q} = (3, 2, -1)$ и $\mathbf{P} = (-4, 1, 3)$, приложенные к точке $C(-1, 4, -2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $A(2, 3, -1)$. (Ответ: $\sqrt{66}$; $\cos \alpha = 1/\sqrt{66}$, $\cos \beta = -4/\sqrt{66}$, $\cos \gamma = -7/\sqrt{66}$.)

5. Объем тетраэдра $V = 5$, три его вершины находятся в точках $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D , если известно, что она лежит на оси Oy . (Ответ: $D_1(0, 8, 0)$, $D_2(0, -7, 0)$.)

6. Стороны ромба лежат на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} , выходящих из общей вершины. Доказать, что диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

7. Даны разложения векторов, служащих сторонами треугольника, по двум взаимно перпендикулярным ортам: $\overrightarrow{AB} = 5\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = 2\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ и $\overrightarrow{CA} = -7\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$. Вычислить длины медианы \overrightarrow{AM} и высоты \overrightarrow{AD} треугольника ABC . (Ответ: $|\overrightarrow{AM}| = 6$, $|\overrightarrow{AD}| = 12\sqrt{5}/5$.)

8. Доказать компланарность векторов \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , зная, что $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

9. В трапеции $ABCD$ отношение основания $|\overrightarrow{AD}|$ к основанию $|\overrightarrow{BC}|$ равно λ . Полагая $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b}$, выразить через \mathbf{a} и \mathbf{b} векторы \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{BC} , \overrightarrow{CD} и \overrightarrow{DA} . (Ответ: $\overrightarrow{AB} = \frac{\lambda\mathbf{a} - \mathbf{b}}{1 + \lambda}$, $\overrightarrow{BC} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{1 + \lambda}$, $\overrightarrow{CD} = \frac{\lambda\mathbf{b} - \mathbf{a}}{1 + \lambda}$, $\overrightarrow{DA} = -\frac{\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b})}{1 + \lambda}$.)

10. Дан тетраэдр $OABC$. Выразить через векторы \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} вектор \overrightarrow{EF} с началом в середине E ребра \overrightarrow{OA}

и концом в точке F пересечения медиан треугольника ABC . (Ответ: $\vec{EF} = (2\vec{OB} + 2\vec{OC} - \vec{OA})/6$.)

11. Даны четыре вектора $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (2, -2, 1)$, $\mathbf{c} = (4, 0, 3)$, $\mathbf{d} = (16, 10, 18)$. Найти вектор \mathbf{x} , являющийся проекцией вектора \mathbf{d} на плоскость, определяемую векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} , при направлении проектирования, параллельном вектору \mathbf{c} . (Ответ: $\mathbf{x} = (-4, 10, 3)$.)

12. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу \vec{AB} опущен перпендикуляр \vec{CH} . Выразить вектор \vec{CH} через векторы \vec{CA} , \vec{CB} и длины катетов $|\vec{BC}| = a$, $|\vec{CA}| = b$. (Ответ: $\vec{CH} = (a^2\vec{CA} + b^2\vec{CB})/(a^2 + b^2)$.)

13. Даны две точки $A(1, 2, 3)$ и $B(7, 2, 5)$. На прямой AB найти такую точку M , чтобы точки B и M были расположены по разные стороны от точки A и отрезок AM был в два раза длиннее отрезка AB . (Ответ: $M(-11, 2, -1)$.)

14. Векторы $\mathbf{a} = (-3, 0, 4)$ и $\mathbf{b} = (5, -2, -14)$ отложены из одной точки. Найти координаты единичного вектора \mathbf{e} , который, будучи отложен от той же точки, делит пополам угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} . (Ответ: $\mathbf{e} = (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$.)

15. Три последовательные вершины трапеции находятся в точках $A(-3, -2, -1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(9, 6, 4)$. Найти четвертую вершину D этой трапеции, точку M пересечения ее диагоналей и точку N пересечения боковых сторон, зная, что длина основания AD равна 15. (Ответ: $D(31/3, 14/3, 2/3)$, $M(9/2, 3, 17/8)$, $N(7, 8, 9)$.)

16. К вершине куба приложены три силы, равные по величине соответственно 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, выходящих из данной вершины. Найти величину равнодействующей этих трех сил и углы, образуемые ею с составляющими силами. (Ответ: 5; $\arccos \frac{7}{10}$, $\arccos \frac{8}{10}$, $\arccos \frac{9}{10}$.)

17. Даны два вектора $\mathbf{a} = (8, 4, 1)$, $\mathbf{b} = (2, -2, 1)$. Найти вектор \mathbf{c} , компланарный векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} , перпендикулярный к вектору \mathbf{a} , равный ему по длине и образующий с вектором \mathbf{b} тупой угол. (Ответ: $\mathbf{c} = (-5/\sqrt{2}, 11/\sqrt{2}, -4/\sqrt{2})$.)

18. Убедившись, что векторы $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} =$

$= 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ можно рассматривать как ребра куба, найти его третье ребро. (Ответ: $\pm(6\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$.)

19. Даны три вектора $\mathbf{a} = (8, 4, 1)$, $\mathbf{b} = (2, -2, 1)$, $\mathbf{c} = (4, 0, 3)$. Найти единичный вектор \mathbf{d} , перпендикулярный к векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ и $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}$ имели одинаковую ориентацию. (Ответ: $\mathbf{d} = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$.)

20. Даны три некопланарных вектора $\vec{OA} = \mathbf{a}$, $\vec{OB} = \mathbf{b}$, $\vec{OC} = \mathbf{c}$, отложенные от одной точки O . Найти вектор $\vec{OD} = \mathbf{d}$, отложенный от той же точки и образующий с векторами \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} равные между собой острые углы. (Ответ: $\mathbf{d} = \pm(|\mathbf{a}|(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + |\mathbf{b}|(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + |\mathbf{c}|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}))$.)

3. ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ

3.1. ПЛОСКОСТЬ

Основная теорема. В декартовых прямоугольных координатах уравнение любой плоскости приводится к виду

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (3.1)$$

где A, B, C, D — заданные числа, причем $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, и обратно, уравнение (3.1) всегда является уравнением некоторой плоскости.

Уравнение (3.1) называется *общим уравнением плоскости*. Коэффициенты A, B, C являются координатами вектора \mathbf{n} , перпендикулярного к плоскости, заданной уравнением (3.1). Он называется *нормальным вектором* этой плоскости и определяет ориентацию плоскости в пространстве относительно системы координат.

Существуют различные способы задания плоскости и соответствующие им виды ее уравнения.

1. *Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору.* Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярна к вектору $\mathbf{n} = (A, B, C)$, то ее уравнение записывается в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (3.2)$$

2. *Уравнение плоскости в «отрезках».* Если плоскость пересекает оси координат Ox, Oy, Oz в точках $M_1(a, 0, 0), M_2(0, b, 0), M_3(0, 0, c)$ соответственно, то ее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (3.3)$$

где $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$.

3. *Уравнение плоскости по трем точкам.* Если плоскость проходит через точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i = \overline{1, 3}$), не лежащие на одной прямой, то ее уравнение можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

Раскрыв данный определитель по элементам первой строки, приходим к уравнению вида (3.2).

Уравнения (3.2) — (3.4) всегда можно привести к виду (3.1). Рассмотрим простейшие задачи.

1°. Величина угла φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ вычисляется на основании формулы

$$\cos \varphi = \cos \widehat{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)} = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \quad (3.5)$$

где $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ — нормальные векторы данных плоскостей. С помощью формулы (3.5) можно получить условие перпендикулярности данных плоскостей:

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0 \text{ или } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Условие параллельности рассматриваемых плоскостей имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

2°. Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной уравнением (3.1), вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

А3-3.1

1. Записать уравнение и построить плоскость:

а) параллельную плоскости Oxz и проходящую через точку $M_0(7, -3, 5)$;

б) проходящую через ось Oz и точку $A(-3, 1, -2)$;

в) параллельную оси Ox и проходящую через две точки $M_1(4, 0, -2)$ и $M_2(5, 1, 7)$;

г) проходящую через точку $B(2, 1, -1)$ и имеющую нормальный вектор $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$;

д) проходящую через точку $C(3, 4, -5)$ параллельно двум векторам $\mathbf{a} = (3, 1, -1)$ и $\mathbf{b} = (1, -2, 1)$.

(Ответ: а) $y + 3 = 0$; б) $x + 3y = 0$; в) $9y - z - 2 = 0$; г) $x - 2y + 3z + 3 = 0$; д) $x + 4y + 7z + 16 = 0$.)

2. Составить уравнение одной из граней тетраэдра, заданного вершинами $A(5, 4, 3)$, $B(2, 3, -2)$, $C(3, 4, 2)$, $D(-1, 2, 1)$. Проверить правильность полученного уравнения.

3. Составить уравнение плоскости:

а) проходящей через точки $M_1(1, 1, 1)$ и $M_2(2, 3, 4)$ перпендикулярно к плоскости $2x - 7y + 5z + 9 = 0$;

б) проходящей через точку $M_0(7, -5, 1)$ и отсекающей на осях координат равные положительные отрезки. (Ответ: а) $31x + y - 11z - 21 = 0$; б) $x + y + z - 3 = 0$.)

4. Вычислить угол между плоскостями $x - 2y + 2z - 3 = 0$ и $3x - 4y + 5 = 0$. (Ответ: $\cos \varphi = 11/15$, $\varphi \approx 42^\circ 51'$.)

5. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями $3x + 6y + 2z - 15 = 0$ и $3x + 6y + 2z + 13 = 0$. (Ответ: 4.)

6. Записать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $3x - y + 7z - 4 = 0$ и $5x + 3y - 5z + 2 = 0$. (Ответ: $x + 2y - 6z + 3 = 0$, $4x + y + z - 1 = 0$.)

Самостоятельная работа

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(1, 0, 2)$ перпендикулярно к двум плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $3x + 6y + 3z - 5 = 0$. (Ответ: $7x - y - 5z + 3 = 0$.)

2. Составить уравнение плоскости, параллельной вектору $s = (2, 1, -1)$ и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки $a = 3$, $b = -2$. (Ответ: $2x - 3y + z - 6 = 0$.)

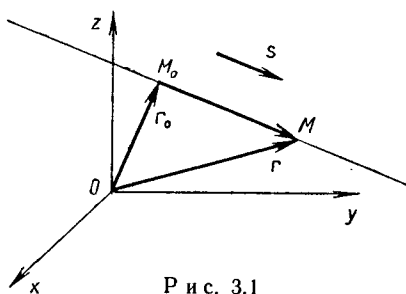
3. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $2x - 2y + 4z - 5 = 0$ и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки $a = -2$, $b = 2/3$ соответственно. (Ответ: $x - 3y - 2z + 2 = 0$.)

4. Найти координаты точки Q , симметричной точке $P(-3, 1, -9)$ относительно плоскости $4x - 3y - z - 7 = 0$. (Ответ: $Q(1, -2, -10)$.)

3.2. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

В зависимости от способа задания прямой в пространстве можно рассматривать различные ее уравнения.

1. *Векторно-параметрическое уравнение прямой.* Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $s = (m, n, p)$,



Р и с. 3.1

а $M(x, y, z)$ — любая точка этой прямой. Если r_0 и r — радиусы-векторы точек M_0 и M (рис. 3.1), то справедливо векторное равенство

$$r = r_0 + ts \quad (-\infty < t < +\infty), \quad (3.6)$$

которое получается по правилу сложения векторов. Уравнение (3.6) называется *векторно-параметрическим уравнением прямой*, s — *направляющим вектором прямой* (3.6), t — *параметром*.

2. *Параметрические уравнения прямой.* Из уравнения (3.6) получаем три скалярных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + mt, \\ y &= y_0 + nt, \\ z &= z_0 + pt, \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

которые называются *параметрическими уравнениями прямой*.

3. *Канонические уравнения прямой.* Разрешая уравнения в системе (3.7) относительно t и приравнявая полученные отношения, приходим к *каноническим уравнениям прямой*:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (3.8)$$

Отметим, что, зная одно из уравнений (3.6) — (3.8), легко получить другие уравнения.

4. *Уравнения прямой в пространстве, проходящей через две точки.* Если прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то ее уравнения можно записать в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (3.9)$$

5. *Общие уравнения прямой в пространстве.* Две пересекающиеся плоскости

$$\left. \begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} \mathbf{n}_1 &= (A_1, B_1, C_1), \\ \mathbf{n}_2 &= (A_2, B_2, C_2), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\mathbf{n}_1 \nparallel \mathbf{n}_2$, определяют прямую. Уравнения (3.10) называются *общими уравнениями прямой в пространстве*.

Направляющий вектор \mathbf{s} прямой, заданной уравнениями (3.10), определяется по формуле

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

а координаты какой-либо точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на этой прямой, можно найти как решение системы (3.10). Тогда уравнения данной прямой можно записать в канонической форме (3.8).

Пример 1. Прямая задана общими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x - y + 2z + 4 &= 0, \\ 3x + y - 5z - 8 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Записать ее канонические уравнения.

► Находим

$$\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = (3, 11, 4).$$

Полагая в исходной системе $z = 0$ и складывая данные уравнения, получаем $x = 1, y = 5$. Точка $M_0(1, 5, 0)$ лежит на данной прямой. Ее канонические уравнения имеют вид

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 5}{11} = \frac{z}{4}. \quad \blacktriangleleft$$

Рассмотрим случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве. Две прямые в пространстве или скрещиваются, или пересекаются, или параллельны, или совпадают. В любом случае они образуют некоторый угол (между их направляющими векторами s_1 и s_2). Если прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}, \quad (3.11)$$

то величина угла φ между ними определяется из формулы

$$\cos \varphi = \cos \widehat{(s_1, s_2)} = \frac{s_1 \cdot s_2}{|s_1| |s_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (3.12)$$

Теперь можно записать *условие перпендикулярности прямых*:

$$s_1 \cdot s_2 = 0 \quad \text{или} \quad m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Условие параллельности прямых (3.11) имеет вид $s_1 \parallel s_2 \parallel \overrightarrow{M_1 M_2}$, а *условие их совпадения* — $s_1 \parallel s_2 \parallel \overrightarrow{M_1 M_2}$, где точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ принадлежат прямым (3.11).

Запишем *необходимое и достаточное условие пересечения непараллельных прямых* ($s_1 \nparallel s_2$), заданных уравнениями (3.11):

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot s_1 \cdot s_2 = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.13)$$

Если условие (3.13) не выполняется, то прямые (3.11) — скрещивающиеся.

Расстояние h от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой (3.8), проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в направлении вектора $s = (m, n, p)$, вычисляется по формуле

$$h = \frac{|s \times \overrightarrow{M_0 M_1}|}{|s|}. \quad (3.14)$$

Рассмотрим случаи взаимного расположения прямой и плоскости. Прямая (3.8) и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ могут пересекаться, быть параллельными либо прямая может лежать в плоскости.

Перейдем от канонических уравнений (3.8) к параметрическим (3.7) и подставим значения x, y, z из уравнений (3.7) в уравнение плоскости. Получим уравнение относительно неизвестного параметра t :

$$(Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \quad (3.15)$$

Возможны три случая.

1. При $Am + Bn + Cp \neq 0$ уравнение (3.15) имеет единственное решение: $t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)/(Am + Bn + Cp)$. Подставив это значение t в параметрические уравнения прямой (3.7), найдем координаты точки пересечения M (рис. 3.2).

2. При

$$Am + Bn + Cp = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \quad (3.16)$$

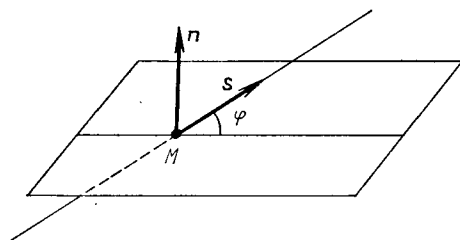
уравнение (3.15) не имеет решения, и прямая не имеет общих точек с плоскостью. Формулы (3.16) являются *условиями параллельности прямой и плоскости*.

3. При

$$Am + Bn + Cp = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad (3.17)$$

любое значение t является решением уравнения (3.15), т. е. любая точка прямой принадлежит плоскости. Равенства (3.17) называются условиями принадлежности прямой плоскости.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость.



Р и с. 3.2

Величина угла φ между прямой и плоскостью вычисляется по формуле

$$|\cos(\widehat{n, s})| = \sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (3.18)$$

А3-3.2

1. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2, 0, -3)$:

а) параллельно вектору $s = (2, -3, 5)$;

б) параллельно прямой $\left. \begin{aligned} 2x - y + 3z - 11 &= 0, \\ 5x + 4y - z + 8 &= 0. \end{aligned} \right\}$

(Ответ: а) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; б) $\frac{x-2}{11} = \frac{y}{-17} = \frac{z+3}{-13}$.)

2. Установить взаимное расположение прямой и плоскости и в случае их пересечения найти координаты точки пересечения:

а) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ и $3x - 3y + 2z - 5 = 0$;

б) $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ и $x + 2y - 4z + 1 = 0$;

в) $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ и $3x - y + 2z - 5 = 0$.

(Ответ: а) параллельны; б) прямая лежит в плоскости; в) пересекается в точке $M(2, 3, 1)$.)

3. Найти координаты точки Q , симметричной точке

$P(2, -5, 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5, 4, 6)$ и $M_2(-2, -17, -8)$. (Ответ: $Q(4, -1, -3)$.)

4. Вычислить угол между прямой

$$\left. \begin{aligned} x - 2y + 3 &= 0, \\ 3y + z - 1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

и плоскостью $2x + 3y - z + 1 = 0$. (Ответ: $\sin \varphi = 5/7$, $\varphi \approx 45^\circ 36'$.)

Самостоятельная работа

1. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ перпендикулярно к плоскости $x + 4y - 3z + 7 = 0$. (Ответ: $11x - 17y - 19z + 10 = 0$.)

2. Вычислить расстояние между прямыми $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$. (Ответ: $d = 3$.)

3. Пересекаются ли прямые $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$ и $\frac{x}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-3}{5}$? (Ответ: нет.)

3.3. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

Основная теорема. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на плоскости любая прямая может быть задана уравнением первой степени относительно x и y :

$$Ax + By + C = 0, \quad (3.19)$$

где A, B, C — некоторые действительные числа, причем $A^2 + B^2 > 0$, и обратно, всякое уравнение вида (3.19) определяет прямую.

Вектор $\mathbf{n} = (A, B)$ перпендикулярен к прямой (3.19) и называется *нормальным вектором прямой*. Уравнение (3.19) называется *общим уравнением прямой*.

Если $B \neq 0$, то уравнение (3.19) можно разрешить относительно y и представить в виде

$$y = kx + b \quad (k = \operatorname{tg} \alpha). \quad (3.20)$$

Последнее уравнение называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом k* . Угол α , отсчитываемый от положительного направления оси Ox до прямой против хода часовой стрелки,

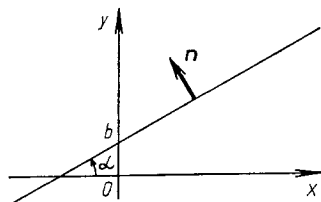


Рис. 3.3

называется *углом наклона прямой*, число b определяет величину отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy (рис. 3.3).

Существуют и другие виды уравнений прямой на плоскости:

1) *уравнение по точке $M_0(x_0, y_0)$ и угловому коэффициенту k*

$$y - y_0 = k(x - x_0); \quad (3.21)$$

2) *параметрические уравнения*

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + mt, \\ y &= y_0 + nt, \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

где $s = (m, n)$ — направляющий вектор прямой, а точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на прямой;

3) *каноническое уравнение прямой* (получаем его из уравнений (3.22))

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}; \quad (3.23)$$

4) *уравнение прямой в «отрезках»*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (3.24)$$

Рассмотрим случай взаимного расположения двух прямых на плоскости.

1. Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то угол φ между ними находится из формулы

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (3.25)$$

Условие перпендикулярности этих прямых имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0, \quad (3.26)$$

а условие их параллельности

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \quad (3.27)$$

2. Если прямые заданы уравнениями вида (3.20) $y_1 = k_1x + b_1$ и $y_2 = k_2x + b_2$, то угол φ между ними находится по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \quad (3.28)$$

Для того чтобы прямые были параллельны, необходимо, чтобы выполнялось равенство $k_1 = k_2$, а для их перпендикулярности необходимо и достаточно, чтобы $k_1k_2 = -1$.

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой (3.19) вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.29)$$

А3-3.3

1. По данным уравнениям построить прямые, найти их угловые коэффициенты и отрезки, отсекаемые ими на осях координат: а) $2x - y + 3 = 0$; б) $5x + 2y - 8 = 0$; в) $3x + 8y + 16 = 0$; г) $3x - y = 0$.

2. Записать уравнения прямых, на которых лежат стороны равнобедренной трапеции, зная, что основания ее равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с большим основанием угол 60° . Большее основание лежит на оси абсцисс, а ось симметрии трапеции — на оси ординат.

(Ответ: $y = 0$, $y = 2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$.)

3. Сила $F = (m, n)$ приложена к точке $M_0(x_0, y_0)$. Записать уравнение прямой, вдоль которой направлена эта сила. (Ответ: $nx - my + my_0 - nx_0 = 0$.)

4. Записать уравнения прямых, которые проходят через точку $A(3, -1)$ и параллельны: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) биссектрисе первого координатного угла; г) прямой $y = 3x + 9$. (Ответ: а) $y = -1$; б) $x = 3$; в) $y = x - 4$; г) $y = 3x - 10$.)

5. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1, 3)$ и $B(4, 5)$. (Ответ: $2x - 5y + 17 = 0$.)

6. Луч света направлен по прямой $y = \frac{2}{3}x - 4$. Найти координаты точки M встречи луча с осью Ox и уравнение отраженного луча. (Ответ: $M(6, 0)$, $y = -\frac{2}{3}x + 4$.)

7. Точка $A(-2, 3)$ лежит на прямой, перпендикулярной к прямой $2x - 3y + 8 = 0$. Записать уравнение этой прямой. (Ответ: $3x + 2y = 0$.)

8. Точка $A(2, -5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Вычислить площадь квадрата. (Ответ: 5.)

Самостоятельная работа

1. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $P(5, 2)$ и отсекающей равные отрезки на осях координат. (Ответ: $x + y - 7 = 0$.)

2. Найти уравнение прямой, параллельной прямой $12x + 5y - 52 = 0$ и отстоящей от нее на расстоянии 2. (Ответ: $12x + 5y - 26 = 0$ или $12x + 5y - 78 = 0$.)

3. Найти уравнение прямой, проходящей через точку

$M_0(4; -3)$ и образующей с осями координат треугольник площадью 3. (Ответ: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ или $\frac{x}{4} + \frac{y}{3/2} = -1$.)

4. Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей угол 45° с прямой $y = 2x + 5$. (Ответ: $3x + y = 0$.)

5. Вычислить величину меньшего угла φ между прямыми $3x + 4y - 2 = 0$ и $8x + 6y + 5 = 0$. Доказать, что точка $A(13/14, -1)$ лежит на биссектрисе этого угла, и сделать рисунок. (Ответ: $\cos \varphi = 24/25 = 0,96$, $\varphi \approx 16^\circ 15'$.)

3.4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 3

ИДЗ-3.1

1. Даны четыре точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ и $A_4(x_4, y_4)$. Составить уравнения:

- плоскости $A_1A_2A_3$; б) прямой A_1A_2 ;
- прямой A_4M , перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;
- прямой A_3N , параллельной прямой A_1A_2 ;
- плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2 .

Вычислить:

е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

ж) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

1.1. $A_1(3, 1, 4)$, $A_2(-1, 6, 1)$, $A_3(-1, 1, 6)$, $A_4(0, 4, -1)$.

1.2. $A_1(3, -1, 2)$, $A_2(-1, 0, 1)$, $A_3(1, 7, 3)$, $A_4(8, 5, 8)$.

1.3. $A_1(3, 5, 4)$, $A_2(5, 8, 3)$, $A_3(1, 2, -2)$, $A_4(-1, 0, 2)$.

1.4. $A_1(2, 4, 3)$, $A_2(1, 1, 5)$, $A_3(4, 9, 3)$, $A_4(3, 6, 7)$.

1.5. $A_1(9, 5, 5)$, $A_2(-3, 7, 1)$, $A_3(5, 7, 8)$, $A_4(6, 9, 2)$.

1.6. $A_1(0, 7, 1)$, $A_2(2, -1, 5)$, $A_3(1, 6, 3)$, $A_4(3, -9, 8)$.

1.7. $A_1(5, 5, 4)$, $A_2(1, -1, 4)$, $A_3(3, 5, 1)$, $A_4(5, 8, -1)$.

1.8. $A_1(6, 1, 1)$, $A_2(4, 6, 6)$, $A_3(4, 2, 0)$, $A_4(1, 2, 6)$.

1.9. $A_1(7, 5, 3)$, $A_2(9, 4, 4)$, $A_3(4, 5, 7)$, $A_4(7, 9, 6)$.

1.10. $A_1(6, 8, 2)$, $A_2(5, 4, 7)$, $A_3(2, 4, 7)$, $A_4(7, 3, 7)$.

1.11. $A_1(4, 2, 5)$, $A_2(0, 7, 1)$, $A_3(0, 2, 7)$, $A_4(1, 5, 0)$.

1.12. $A_1(4, 4, 10)$, $A_2(7, 10, 2)$, $A_3(2, 8, 4)$, $A_4(9, 6, 9)$.

1.13. $A_1(4, 6, 5)$, $A_2(6, 9, 4)$, $A_3(2, 10, 10)$, $A_4(7, 5, 9)$.

1.14. $A_1(3, 5, 4)$, $A_2(8, 7, 4)$, $A_3(5, 10, 4)$, $A_4(4, 7, 8)$.

1.15. $A_1(10, 9, 6)$, $A_2(2, 8, 2)$, $A_3(9, 8, 9)$, $A_4(7, 10, 3)$.

1.16. $A_1(1, 8, 2)$, $A_2(5, 2, 6)$, $A_3(5, 7, 4)$, $A_4(4, 10, 9)$.

- 1.17. $A_1(6, 6, 5), A_2(4, 9, 5), A_3(4, 6, 11), A_4(6, 9, 3).$
 1.18. $A_1(7, 2, 2), A_2(-5, 7, -7), A_3(5, -3, 1), A_4(2, 3, 7).$
 1.19. $A_1(8, -6, 4), A_2(10, 5, -5), A_3(5, 6, -8), A_4(8,$
 10, 7).
 1.20. $A_1(1, -1, 3), A_2(6, 5, 8), A_3(3, 5, 8), A_4(8, 4, 1).$
 1.21. $A_1(1, -2, 7), A_2(4, 2, 10), A_3(2, 3, 5), A_4(5, 3, 7).$
 1.22. $A_1(4, 2, 10), A_2(1, 2, 0), A_3(3, 5, 7), A_4(2, -3, 5).$
 1.23. $A_1(2, 3, 5), A_2(5, 3, -7), A_3(1, 2, 7), A_4(4, 2, 0).$
 1.24. $A_1(5, 3, 7), A_2(-2, 3, 5), A_3(4, 2, 10), A_4(1, 2, 7).$
 1.25. $A_1(4, 3, 5), A_2(1, 9, 7), A_3(0, 2, 0), A_4(5, 3, 10).$
 1.26. $A_1(3, 2, 5), A_2(4, 0, 6), A_3(2, 6, 5), A_4(6, 4, -1).$
 1.27. $A_1(2, 1, 6), A_2(1, 4, 9), A_3(2, -5, 8), A_4(5, 4, 2).$
 1.28. $A_1(2, 1, 7), A_2(3, 3, 6), A_3(2, -3, 9), A_4(1, 2, 5).$
 1.29. $A_1(2, -1, 7), A_2(6, 3, 1), A_3(3, 2, 8), A_4(2, -3, 7).$
 1.30. $A_1(0, 4, 5), A_2(3, -2, 1), A_3(4, 5, 6), A_4(3, 3, 2).$

2. Решить следующие задачи.

2.1. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(-2, 7, 3)$ параллельно плоскости $x - 4y + 5z - 1 = 0$. (Ответ: $-1/15, 4/15, -1/3$.)

2.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка M_1M_2 перпендикулярно к этому отрезку, если $M_1(1, 5, 6), M_2(-1, 7, 10)$. (Ответ: $x - y - 2z + 22 = 0$.)

2.3. Найти расстояние от точки $M(2; 0; -0,5)$ до плоскости $4x - 4y + 2z + 17 = 0$. (Ответ: $d = 4$.)

2.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2, -3, 5)$ параллельно плоскости Oxy . (Ответ: $z - 5 = 0$.)

2.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $A(2, 5, -1)$. (Ответ: $y + 5z = 0$.)

2.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 5, -1), B(-3, 1, 3)$ параллельно оси Oy . (Ответ: $4x + 5z - 3 = 0$.)

2.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, 4, 0)$ и прямую $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$. (Ответ: $y - z - 4 = 0$.)

2.8. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$. (Ответ: $x + 2y - 2z - 1 = 0$.)

2.9. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $3x - y - 7z + 9 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось Ox и точку $A(3, 2, -5)$. (Ответ: $3x - y - 7z + 9 = 0, 5y + 2z = 0$.)

2.10. Составить уравнение плоскости в «отрезках», если она проходит через точку $M(6, -10, 1)$ и отсекает на оси Ox отрезок $a = -3$, а на оси Oz — отрезок $c = 2$.

(Ответ: $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1$.)

2.11. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2, 3, -4)$ параллельно двум векторам $\mathbf{a} = (4, 1, -1)$ и $\mathbf{b} = (2, -1, 2)$. (Ответ: $x - 10y - 6z + 4 = 0$.)

2.12. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(1, 1, 0), B(2, -1, -1)$ перпендикулярно к плоскости $5x + 2y + 3z - 7 = 0$. (Ответ: $x + 2y - 3z - 3 = 0$.)

2.13. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к двум плоскостям $2x - 3y + z - 1 = 0$ и $x - y + 5z + 3 = 0$. (Ответ: $14x + 9y - z = 0$.)

2.14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(3, -1, 2), B(2, 1, 4)$ параллельно вектору $\mathbf{a} = (5, -2, -1)$. (Ответ: $2x + 9y - 8z + 19 = 0$.)

2.15. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к вектору \overrightarrow{AB} , если $A(5, -2, 3), B(1, -3, 5)$. (Ответ: $4x + y - 2z = 0$.)

2.16. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью, проходящей через точку $M(2, -3, 3)$ параллельно плоскости $3x + y - 3z = 0$. (Ответ: $-2, -6, 2$.)

2.17. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, -1, 2)$ перпендикулярно к отрезку M_1M_2 , если $M_1(2, 3, -4), M_2(-1, 2, -3)$. (Ответ: $3x + y - z = 0$.)

2.18. Показать, что прямая $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{8} = \frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x + 3y - 2z - 1 = 0$, а прямая $x = t + 7, y = t - 2, z = 2t + 1$ лежит в этой плоскости.

2.19. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, -4, 1)$ параллельно координатной плоскости Oxz . (Ответ: $y + 4 = 0$.)

2.20. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $M(3, -5, 2)$. (Ответ: $2x - 3z = 0$.)

2.21. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1, 2, 3)$ и $N(-3, 4, -5)$ параллельно оси Oz . (Ответ: $x + 2y - 5 = 0$.)

2.22. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2, 3, -1)$ и прямую $x = t - 3$, $y = 2t + 5$, $z = -3t + 1$. (Ответ: $10x + 13y + 12z - 47 = 0$.)

2.23. Найти проекцию точки $M(4, -3, 1)$ на плоскость $x - 2y - z - 15 = 0$. (Ответ: $M_1(5, -5, 0)$.)

2.24. Определить, при каком значении B плоскости $x - 4y + z - 1 = 0$ и $2x + By + 10z - 3 = 0$ будут перпендикулярны. (Ответ: $B = 3$.)

2.25. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(2, -3, -4)$ и отсекает на осях координат различные от нуля отрезки одинаковой величины. (Ответ: $x + y + z + 5 = 0$.)

2.26. При каких значениях n и A прямая $\frac{x}{3} = \frac{y-5}{n} = \frac{z+5}{6}$ перпендикулярна к плоскости $Ax + 2y - 2z - 7 = 0$? (Ответ: $A = -1$, $n = -6$.)

2.27. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, 3, -1)$, $B(1, 1, 4)$ перпендикулярно к плоскости $x - 4y + 3z + 2 = 0$. (Ответ: $7x + 4y + 3z - 23 = 0$.)

2.28. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно к плоскостям $x + 5y - z + 7 = 0$ и $3x - y + 2z - 3 = 0$. (Ответ: $9x - 5y - 16z = 0$.)

2.29. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(2, 3, -5)$ и $N(-1, 1, -6)$ параллельно вектору $\mathbf{a} = (4, 4, 3)$. (Ответ: $2x - 5y + 4z + 31 = 0$.)

2.30. Определить, при каком значении C плоскости $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ и $x - 3y + 2z + 5 = 0$ будут перпендикулярны. (Ответ: $C = -9$.)

3. Решить следующие задачи.

3.1. Доказать параллельность прямых $\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1}$ и $x - 2y + 2z - 8 = 0$, $x + 6z - 6 = 0$.

3.2. Доказать, что прямая $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{3}$ параллельна плоскости $2x + y - z = 0$, а прямая $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{3}$ лежит в этой плоскости.

3.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1, -3, 3)$ и образующей с осями координат углы, соответственно равные 60° , 45° и 120° . (Ответ: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{\sqrt{2}} = \frac{z-3}{-1}$.)

3.4. Доказать, что прямая $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{6}$ перпендикулярна к прямой

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - 4z + 2 &= 0, \\ 4x - y - 5z + 4 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

3.5. Составить параметрические уравнения медианы треугольника с вершинами $A(3, 6, -7)$, $B(-5, 1, -4)$, $C(0, 2, 3)$, проведенной из вершины C . (Ответ: $x = 2t$, $y = -3t + 2$, $z = 17t + 3$.)

3.6. При каком значении n прямая $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{n} = \frac{z}{1}$ параллельна прямой

$$\left. \begin{aligned} x + y - z &= 0, \\ x - y - 5z - 8 &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ (Ответ: } n = -2\text{.)}$$

3.7. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ и плоскости $2x + 3y + z - 1 = 0$. (Ответ: $M(2, -3, 6)$.)

3.8. Найти проекцию точки $P(3, 1, -1)$ на плоскость $x + 2y + 3z - 30 = 0$. (Ответ: $P_1(5, 5, 5)$.)

3.9. При каком значении C плоскости $3x - 5y + Cz - 3 = 0$ и $x + 3y + 2z + 5 = 0$ перпендикулярны? (Ответ: $C = 6$.)

3.10. При каком значении A плоскость $Ax + 3y - 5z + 1 = 0$ параллельна прямой $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{1}$? (Ответ: $A = -1$.)

3.11. При каких значениях m и C прямая $\frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x - 2y + Cz + 1 = 0$? (Ответ: $m = -6$, $C = 1,5$.)

3.12. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат параллельно прямой $x = 2t + 5$, $y = -3t + 1$, $z = -7t - 4$. (Ответ: $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{-7}$.)

3.13. Проверить, лежат ли на одной прямой точки $A(0, 0, 2)$, $B(4, 2, 5)$ и $C(12, 6, 11)$. (Ответ: лежат.)

3.14. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, -5, 3)$ параллельно прямой $2x - y + 3z - 1 = 0$, $5x + 4y - z - 7 = 0$. (Ответ: $\frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}$.)

3.15. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, -3, 4)$ перпендикулярно к прямым $\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{1}$ и $\frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-3}$. (Ответ: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-4}{3}$.)

3.16. При каких значениях A и B плоскость $Ax + By + 6z - 7 = 0$ перпендикулярна к прямой $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z+1}{3}$? (Ответ: $A = 4$, $B = -8$.)

3.17. Показать, что прямая $\frac{x}{6} = \frac{y-3}{-8} = \frac{z-1}{-9}$ параллельна плоскости $x + 3y - 2z + 1 = 0$, а прямая $x = t + 7$, $y = t - 2$, $z = 2t + 1$ лежит в этой плоскости.

3.18. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $K(-3, 1, -2)$. (Ответ: $x + 3y = 0$.)

3.19. Показать, что прямые $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{3}$ и $3x + y - 5z + 1 = 0$, $2x + 3y - 8z + 3 = 0$ перпендикулярны.

3.20. При каком значении D прямая $3x - y + 2z - 6 = 0$, $x + 4y - z + D = 0$ пересекает ось Oz ? (Ответ: $D = 3$.)

3.21. При каком значении p прямые

$$\left. \begin{array}{l} x = 2t + 5, \\ y = -t + 2, \\ z = pt - 7 \end{array} \right\} \text{ и } \left. \begin{array}{l} x + 3y + z + 2 = 0, \\ x - y - 3z - 2 = 0 \end{array} \right\}$$

параллельны? (Ответ: $p = -5$.)

3.22. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x - y + 2z - 8 = 0$. (Ответ: $M(2, 0, 1)$.)

3.23. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $K(2, -5, 3)$ параллельно плоскости Oxz . (Ответ: $y + 5 = 0$.)

3.24. Составить общие уравнения прямой, образованной пересечением плоскости $x + 2y - z + 5 = 0$ с плоскостью, проходящей через ось Oy и точку $M(5, 3, 2)$. (Ответ: $x + 2y - z + 5 = 0, 2x - 5z = 0$.)

3.25. При каких значениях B и D прямая $x - 2y + z - 9 = 0, 3x + By + z + D = 0$ лежит в плоскости Oxy ? (Ответ: $B = -6, D = -27$.)

3.26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, 3, 3)$ параллельно двум векторам $\mathbf{a} = (-1, -3, 1)$ и $\mathbf{b} = (4, 1, 6)$. (Ответ: $19x - 10y - 11z + 25 = 0$.)

3.27. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $E(3, 4, 5)$ параллельно оси Ox . (Ответ: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-5}{0}$.)

3.28. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(2, 3, 1)$ перпендикулярно к прямой $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$. (Ответ: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1}$.)

3.29. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1, -5, 3)$ перпендикулярно к прямым $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$ и $x = 3t + 1, y = -t - 5, z = 2t + 3$. (Ответ: $\frac{x-1}{5} = \frac{y+5}{-7} = \frac{z-3}{-11}$.)

3.30. Найти точку, симметричную точке $M(4, 3, 10)$ относительно прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{5}$. (Ответ: $M_1(2, 9, 6)$.)

Решение типового варианта

1. Даны четыре точки $A_1(4, 7, 8), A_2(-1, 13, 0), A_3(2, 4, 9), A_4(1, 8, 9)$. Составить уравнения:

- плоскости $A_1A_2A_3$; б) прямой A_1A_2 ;
- прямой A_4M , перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;
- прямой A_4N , параллельной прямой A_1A_2 .

Вычислить:

д) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

е) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

► а) Используя формулу (3.4), составляем уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $6x - 7y - 9z + 97 = 0$;

б) Учитывая уравнения прямой, проходящей через две точки (см. формулу (3.9)), уравнения прямой A_1A_2 можно записать в виде

$$\frac{x-4}{5} = \frac{y-7}{-6} = \frac{z-8}{8};$$

в) Из условия перпендикулярности прямой A_4M и плоскости $A_1A_2A_3$ следует, что в качестве направляющего вектора прямой s можно взять нормальный вектор $\mathbf{n} = (6, -7, -9)$ плоскости $A_1A_2A_3$. Тогда уравнение прямой A_4M с учетом уравнений (3.8) запишется в виде

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-8}{-7} = \frac{z-9}{-9};$$

г) Так как прямая A_4N параллельна прямой A_1A_2 , то их направляющие векторы \mathbf{s}_1 и \mathbf{s}_2 можно считать совпадающими: $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_2 = (5, -6, 8)$. Следовательно, уравнение прямой A_4N имеет вид

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-8}{-6} = \frac{z-9}{8};$$

д) По формуле (3.18)

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{|6 \cdot 5 + (-7)(-6) + (-9)8|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2 + (-9)^2} \sqrt{5^2 + (-6)^2 + 8^2}} = \\ &= \frac{34}{\sqrt{11} \sqrt{166}} \approx 0,8; \end{aligned}$$

е) В соответствии с формулой (3.5)

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{0 \cdot 6 + 0 \cdot (-7) + 1 \cdot (-9)}{\sqrt{1} \sqrt{6^2 + (-7)^2 + (-9)^2}} = \\ &= \frac{-9}{\sqrt{166}} \approx -0,7. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M(4, 3, 1)$ и $N(-2, 0, -1)$ параллельно прямой, проведенной через точки $A(1, 1, -1)$ и $B(-3, 1, 0)$.

► Согласно формуле (3.9), уравнение прямой AB имеет вид

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{1}.$$

Если плоскость проходит через точку $M(4, 3, 1)$, то ее уравнение можно записать в виде $A(x-4) + B(y-3) + C(z-1) = 0$. Так как эта плоскость проходит и через точку $N(-2, 0, -1)$, то выполняется условие

$$A(-2-4) + B(0-3) + C(-1-1) = 0 \text{ или} \\ 6A + 3B + 2C = 0.$$

Поскольку искомая плоскость параллельна найденной прямой AB , то с учетом условия параллельности (3.16) имеем:

$$-4A + 0B + 1C = 0 \text{ или } 4A - C = 0.$$

Решая систему

$$\left. \begin{aligned} 6A + 3B + 2C &= 0, \\ 4A &\quad -C = 0, \end{aligned} \right\}$$

находим, что $C = 4A$, $B = -\frac{14}{3}A$. Подставив полученные значения C и B в уравнение искомой плоскости, имеем

$$A(x-4) - \frac{14}{3}A(y-3) + 4A(z-1) = 0.$$

Так как $A \neq 0$, то полученное уравнение эквивалентно уравнению

$$3(x-4) - 14(y-3) + 12(z-1) = 0. \quad \blacktriangleleft$$

3. Найти координаты x_2, y_2, z_2 точки M_2 , симметричной точке $M_1(6, -4, -2)$ относительно плоскости $x + y + z - 3 = 0$.

► Запишем параметрические уравнения прямой M_1M_2 , перпендикулярной к данной плоскости: $x = 6 + t$, $y = -4 + t$, $z = -2 + t$. Решив их совместно с уравнением данной плоскости, найдем $t = 1$ и, следовательно, точку M пересечения прямой M_1M_2 с данной плоскостью: $M(7, -3, -1)$. Так как точка M является серединой отрезка M_1M_2 , то верны равенства (см. пример 1 из § 2.2):

$$7 = \frac{6 + x_2}{2}, \quad -3 = \frac{-4 + y_2}{2}, \quad -1 = \frac{-2 + z_2}{2},$$

из которых находим координаты точки M_2 : $x_2 = 8$, $y_2 = -2$, $z_2 = 0$. ◀

ИДЗ-3.2

1. Даны вершины треугольника ABC : $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Найти:

- уравнение стороны AB ;
- уравнение высоты CH ;
- уравнение медианы AM ;
- точку N пересечения медианы AM и высоты CH ;
- уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB ;
- расстояние от точки C до прямой AB .

- $A(-2, 4)$, $B(3, 1)$, $C(10, 7)$,
- $A(-3, -2)$, $B(14, 4)$, $C(6, 8)$,
- $A(1, 7)$, $B(-3, -1)$, $C(11, -3)$,
- $A(1, 0)$, $B(-1, 4)$, $C(9, 5)$,
- $A(1, -2)$, $B(7, 1)$, $C(3, 7)$,
- $A(-2, -3)$, $B(1, 6)$, $C(6, 1)$,
- $A(-4, 2)$, $B(-6, 6)$, $C(6, 2)$,
- $A(4, -3)$, $B(7, 3)$, $C(1, 10)$,
- $A(4, -4)$, $B(8, 2)$, $C(3, 8)$,
- $A(-3, -3)$, $B(5, -7)$, $C(7, 7)$,
- $A(1, -6)$, $B(3, 4)$, $C(-3, 3)$,
- $A(-4, 2)$, $B(8, -6)$, $C(2, 6)$,
- $A(-5, 2)$, $B(0, -4)$, $C(5, 7)$,
- $A(4, -4)$, $B(6, 2)$, $C(-1, 8)$,
- $A(-3, 8)$, $B(-6, 2)$, $C(0, -5)$,
- $A(6, -9)$, $B(10, -1)$, $C(-4, 1)$,
- $A(4, 1)$, $B(-3, -1)$, $C(7, -3)$,
- $A(-4, 2)$, $B(6, -4)$, $C(4, 10)$,
- $A(3, -1)$, $B(11, 3)$, $C(-6, 2)$,
- $A(-7, -2)$, $B(-7, 4)$, $C(5, -5)$,
- $A(-1, -4)$, $B(9, 6)$, $C(-5, 4)$,
- $A(10, -2)$, $B(4, -5)$, $C(-3, 1)$,
- $A(-3, -1)$, $B(-4, -5)$, $C(8, 1)$,
- $A(-2, -6)$, $B(-3, 5)$, $C(4, 0)$,
- $A(-7, -2)$, $B(3, -8)$, $C(-4, 6)$,
- $A(0, 2)$, $B(-7, -4)$, $C(3, 2)$,
- $A(7, 0)$, $B(1, 4)$, $C(-8, -4)$,
- $A(1, -3)$, $B(0, 7)$, $C(-2, 4)$,

- 1.29. $A(-5, 1)$, $B(8, -2)$, $C(1, 4)$,
1.30. $A(2, 5)$, $B(-3, 1)$, $C(0, 4)$.

2. Решить следующие задачи.

2.1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - 2y - 7 = 0$ и $x + 3y - 6 = 0$ и отсекающей на оси абсцисс отрезок, равный 3. (Ответ: $x = 3$.)

2.2. Найти проекцию точки $A(-8, 12)$ на прямую, проходящую через точки $B(2, -3)$ и $C(-5, 1)$. (Ответ: $A_1(-12, 5)$.)

2.3. Даны две вершины треугольника ABC : $A(-4, 4)$, $B(4, -12)$ и точка $M(4, 2)$ пересечения его высот. Найти вершину C . (Ответ: $C(8, 4)$.)

2.4. Найти уравнение прямой, отсекающей на оси ординат отрезок, равный 2, и проходящей параллельно прямой $2y - x = 3$. (Ответ: $x - 2y + 4 = 0$.)

2.5. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, -3)$ и точку пересечения прямых $2x - y = 5$ и $x + y = 1$. (Ответ: $x = 2$.)

2.6. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — трапеция, если $A(3, 6)$, $B(5, 2)$, $C(-1, -3)$, $D(-5, 5)$.

2.7. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3, 1)$ перпендикулярно к прямой BC , если $B(2, 5)$, $C(1, 0)$. (Ответ: $x + 5y - 8 = 0$.)

2.8. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, 1)$ параллельно прямой MN , если $M(-3, -2)$, $N(1, 6)$. (Ответ: $2x - y + 5 = 0$.)

2.9. Найти точку, симметричную точке $M(2, -1)$ относительно прямой $x - 2y + 3 = 0$. (Ответ: $M_1(-4/5, 23/5)$.)

2.10. Найти точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, если $A(-1, -3)$, $B(3, 5)$, $C(5, 2)$, $D(3, -5)$. (Ответ: $O(3, 1/3)$.)

2.11. Через точку пересечения прямых $6x - 4y + 5 = 0$, $2x + 5y + 8 = 0$ провести прямую, параллельную оси абсцисс. (Ответ: $y = -1$.)

2.12. Известны уравнения стороны AB треугольника ABC $4x + y = 12$, его высот BH $5x - 4y = 12$ и AM $x + y = 6$. Найти уравнения двух других сторон треугольника ABC . (Ответ: $7x - 7y - 16 = 0$, $4x + 5y - 28 = 0$.)

2.13. Даны две вершины треугольника ABC : $A(-6, 2)$, $B(2, -2)$ и точка пересечения его высот $H(1, 2)$. Найти координаты точки M пересечения стороны AC и высоты BH . (Ответ: $M(10/17, 62/17)$.)

2.14. Найти уравнения высот треугольника ABC , проходящих через вершины A и B , если $A(-4, 2)$, $B(3, -5)$, $C(5, 0)$. (Ответ: $3x + 5y + 2 = 0$, $9x + 2y - 28 = 0$.)

2.15. Вычислить координаты точки пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника, вершинами которого служат точки $A(2, 3)$, $B(0, -3)$, $C(6, -3)$. (Ответ: $M(3, -2/3)$.)

2.16. Составить уравнение высоты, проведенной через вершину A треугольника ABC , зная уравнения его сторон: $AB - 2x - y - 3 = 0$, $AC - x + 5y - 7 = 0$, $BC - 3x - 2y + 13 = 0$. (Ответ: $2x + 3y - 7 = 0$.)

2.17. Дан треугольник с вершинами $A(3, 1)$, $B(-3, -1)$ и $C(5, -12)$. Найти уравнение и вычислить длину его медианы, проведенной из вершины C . (Ответ: $2x + y + 2 = 0$, $d = 54/\sqrt{17} \approx 13,1$.)

2.18. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x + 5y - 8 = 0$ и $2x + 3y + 4 = 0$. (Ответ: $6x + 11y = 0$.)

2.19. Найти уравнения перпендикуляров к прямой $3x + 5y - 15 = 0$, проведенных через точки пересечения данной прямой с осями координат. (Ответ: $5x - 3y - 25 = 0$, $5x - 3y + 9 = 0$.)

2.20. Даны уравнения сторон четырехугольника: $x - y = 0$, $x + 3y = 0$, $x - y - 4 = 0$, $3x + y - 12 = 0$. Найти уравнения его диагоналей. (Ответ: $y = 0$, $x = 3$.)

2.21. Составить уравнения медианы CM и высоты CK треугольника ABC , если $A(4, 6)$, $B(-4, 0)$, $C(-1, -4)$. (Ответ: $7x - y + 3 = 0$ (CM), $4x + 3y + 16 = 0$ (CK).)

2.22. Через точку $P(5, 2)$ провести прямую: а) отсекающую равные отрезки на осях координат; б) параллельную оси Ox ; в) параллельную оси Oy . (Ответ: $x + y - 7 = 0$, $y = 2$, $x = 5$.)

2.23. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2, 3)$ и составляющей с осью Ox угол: а) 45° , б) 90° , в) 0° . (Ответ: $x - y + 5 = 0$, $x + 2 = 0$, $y - 3 = 0$.)

2.24. Какую ординату имеет точка C , лежащая на одной прямой с точками $A(-6, -6)$ и $B(-3, -1)$ и имеющая абсциссу, равную 3? (Ответ: $y = 9$.)

2.25. Через точку пересечения прямых $2x - 5y - 1 = 0$ и $x + 4y - 7 = 0$ провести прямую, делящую отрезок между точками $A(4, -3)$ и $B(-1, 2)$ в отношении $\lambda = 2/3$. (Ответ: $2x - y - 5 = 0$.)

2.26. Известны уравнения двух сторон ромба $2x - 5y - 1 = 0$ и $2x - 5y - 34 = 0$ и уравнение одной из

его диагоналей $x + 3y - 6 = 0$. Найти уравнение второй диагонали. (Ответ: $3x - y - 23 = 0$.)

2.27. Найти точку E пересечения медиан треугольника, вершинами которого являются точки $A(-3, 1)$, $B(7, 5)$ и $C(5, -3)$. (Ответ: $E(3, 1)$.)

2.28. Записать уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1, 1)$ под углом 45° к прямой $2x + 3y = 6$. (Ответ: $x - 5y + 6 = 0$, $5x + y + 4 = 0$.)

2.29. Даны уравнения высот треугольника ABC $2x - 3y + 1 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$ и координаты его вершины $A(2, 3)$. Найти уравнения сторон AB и AC треугольника. (Ответ: $2x - y - 1 = 0$ (AB), $3x + 2y - 12 = 0$ (AC).)

2.30. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x - 2y = 0$, $x - y - 1 = 0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3, -1)$. Найти уравнения двух других сторон. (Ответ: $x - y - 7 = 0$, $x - 2y - 10 = 0$.)

Решение типового варианта

1. Даны вершины треугольника ABC : $A(4, 3)$, $B(-3, -3)$, $C(2, 7)$. Найти:

- уравнение стороны AB ;
- уравнение высоты CH ;
- уравнение медианы AM ;
- точку N пересечения медианы AM и высоты CH ;
- уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB ;
- расстояние от точки C до прямой AB .

► а) Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через две точки (см. формулу (3.9)), получим уравнение стороны AB :

$$\frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-3}{-3-3},$$

откуда

$$6(x-4) = 7(y-3) \text{ или } 6x - 7y - 3 = 0;$$

б) Согласно уравнению (3.20), угловой коэффициент прямой AB $k_1 = 6/7$. С учетом условия перпендикулярности прямых AB и CH (см. формулу (3.28)) угловой коэффициент высоты CH $k_2 = -7/6$ ($k_1 k_2 = -1$). По точке $C(2, 7)$ и угловому коэффициенту $k_2 = -7/6$ составляем уравнение высоты CH (см. уравнение (3.21)):

$$y - 7 = -\frac{7}{6}(x - 2) \text{ или } 7x + 6y - 56 = 0;$$

в) По известным формулам (см. § 2.2) находим координаты x , y середины M отрезка BC :

$$x = (-3 + 2)/2 = -1/2, \quad y = (-3 + 7)/2 = 2.$$

Теперь по двум известным точкам A и M составляем уравнение медианы AM :

$$\frac{x-4}{-1/2-4} = \frac{y-3}{2-3} \quad \text{или} \quad 2x - 9y + 19 = 0;$$

г) Для нахождения координат точки N пересечения медианы AM и высоты CH составляем систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + 6y - 56 = 0, \\ 2x - 9y + 19 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, получаем $N(26/5, 49/15)$;

д) Так как прямая, проходящая через вершину C , параллельна стороне AB , то их угловые коэффициенты равны $k_1 = 6/7$. Тогда, согласно уравнению (3.21), по точке C и угловому коэффициенту k_1 составляем уравнение прямой CD :

$$y - 7 = \frac{6}{7}(x - 2) \quad \text{или} \quad 6x - 7y + 37 = 0;$$

е) Расстояние от точки C до прямой AB вычисляем по формуле (3.29):

$$d = |CH| = \frac{|6 \cdot 2 - 7 \cdot 7 - 37|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}} = \frac{40}{\sqrt{85}} \approx 4,4.$$

Решение данной задачи проиллюстрировано на рис. 3.4. ◀

2. Известны вершины $O(0, 0)$, $A(-2, 0)$ параллелограмма $OACD$ и точка пересечения его диагоналей $B(2, -2)$. Записать уравнения сторон параллелограмма.

► Уравнение стороны OA можно записать сразу: $y = 0$. Далее, так как точка B является серединой диагонали AD (рис. 3.5), то по формулам деления отрезка пополам (см. § 2.2) можно вычислить координаты вершины $D(x, y)$:

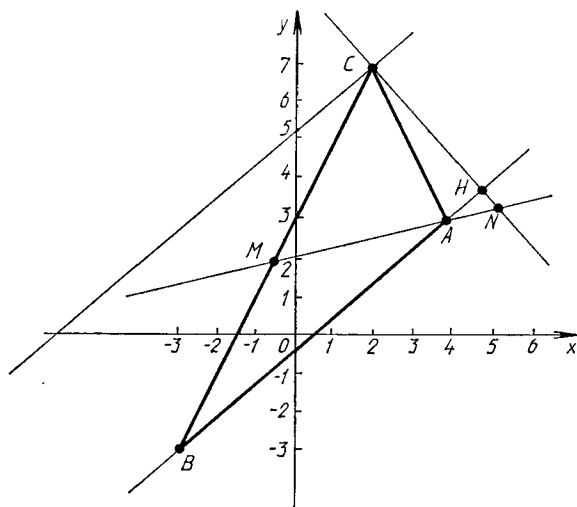
$$2 = \frac{-2+x}{2}, \quad -2 = \frac{0+y}{2},$$

откуда $x = 6$, $y = -4$.

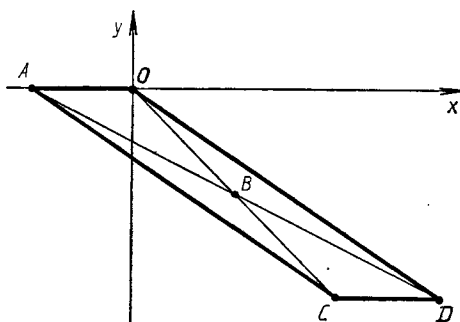
Теперь можно найти уравнения всех остальных сторон. Учитывая параллельность сторон OA и CD , составляем уравнение стороны CD : $y = -4$. Уравнение стороны OD составляем по двум известным точкам:

$$\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-0}{-4-0},$$

откуда $y = -\frac{2}{3}x$, $2x + 3y = 0$.



Р и с. 3.4



Р и с. 3.5

Наконец, уравнение стороны AC находим, учитывая тот факт, что она проходит через известную точку $A(-2, 0)$ параллельно известной прямой OD (см. уравнение (3.21)):

$$y - 0 = -\frac{2}{3}(x + 2) \text{ или } 2x + 3y + 4 = 0. \blacktriangleleft$$

3.5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 3

1. Составить уравнение биссектрисы того угла между прямыми $x - 7y = 1$ и $x + y = -7$, внутри которого лежит точка $A(1, 1)$. (Ответ: $3x - y + 17 = 0$.)

2. Составить уравнения сторон параллелограмма $ABCD$, зная, что его диагонали пересекаются в точке $M(1, 6)$, а стороны AB , BC , CD и DA проходят соответственно через точки $P(3, 0)$, $Q(6, 6)$, $R(5, 9)$, $S(-5, 4)$. (Ответ: $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 6 = 0$, $x + 2y - 23 = 0$, $2x - y + 14 = 0$.)

3. Дано уравнение стороны ромба $x + 3y - 8 = 0$ и уравнение его диагонали $2x + y + 4 = 0$. Записать уравнения остальных сторон ромба, зная, что точка $A(-9, -1)$ лежит на стороне, параллельной данной. (Ответ: $x + 3y + 12 = 0$, $3x - y - 4 = 0$, $3x - y + 16 = 0$.)

4. Зная уравнения двух сторон треугольника ABC $2x + 3y - 6 = 0$ (AB), $x + 2y - 5 = 0$ (AC) и внутренний угол при вершине B , равный $\pi/4$, записать уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC . (Ответ: $x - 5y + 23 = 0$.)

5. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(2, -4)$ и уравнения биссектрис двух его углов: $x + y - 2 = 0$ и $x - 3y - 6 = 0$. (Ответ: $x + 7y - 6 = 0$, $x - y - 6 = 0$, $7x + y - 10 = 0$.)

6. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(-4, 2)$ и уравнения двух медиан: $3x - 2y + 2 = 0$ и $3x + 5y - 12 = 0$. (Ответ: $2x + y - 8 = 0$, $x - 3y + 10 = 0$, $x + 4y - 4 = 0$.)

7. В треугольнике с вершинами $A(-3, -1)$, $B(1, -5)$, $C(9, 3)$ стороны AB и AC разделены в отношении $\lambda = 3$, считая от общей вершины A . Доказать, что прямые, соединяющие точки деления с противоположными вершинами, и медиана пересекаются в одной точке.

8. Прямые $3x + 4y - 30 = 0$ и $3x - 4y + 12 = 0$ касаются окружности, радиус которой $R = 5$. Вычислить площадь четырехугольника, образованного этими касательными и радиусами круга, проведенными в точки касания. (Ответ: $S \approx 1,68$.)

9. Даны две точки $A(-3, 8)$ и $B(2, 2)$. На оси Ox найти такую точку M , чтобы ломаная линия AMB имела наименьшую длину. (Ответ: $M(1, 0)$.)

10. Показать, что прямые $\frac{x+3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{1}$

и $x = 3z - 4$, $y = z + 2$ пересекаются, и найти точку A их пересечения. (Ответ: $A(-1, 3, 1)$.)

11. Найти расстояние от точки $P(7, 9, 7)$ до прямой $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$. (Ответ: $\sqrt{22}$.)

12. Найти кратчайшее расстояние между двумя непараллельными прямыми: $\frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$. (Ответ: 7.)

13. Даны вершины треугольника $A(4, 1, -2)$, $B(2, 0, 0)$, $C(-2, 3, -5)$. Составить уравнения его высоты, опущенной из вершины B на противоположную сторону. (Ответ:

$$\frac{x-2}{74} = \frac{y}{57} = \frac{z}{-110}.)$$

14. Дан куб, длина ребра которого равна единице. Вычислить расстояние от вершины куба до его диагонали, не проходящей через эту вершину. (Ответ: $d = \sqrt{2/3}$.)

15. На плоскости Oxy найти такую точку M , сумма расстояний которой до точек $A(-1, 2, 5)$ и $B(11, -16, 10)$ была бы наименьшей. (Ответ: $M(3, -4, 0)$.)

16. Точка $M(x, y, z)$ движется прямолинейно и равномерно из начального положения $M_0(15, -24, -16)$ со скоростью $v = 12$ в направлении вектора $s = (-2, 2, 1)$. Убедившись, что траектория движения точки M пересекает плоскость $3x + 4y + 7z - 17 = 0$, найти координаты точки M_1 их пересечения. (Ответ: $M_1(-25, 16, 4)$.)

17. Доказать, что прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ и $\frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-2}$ лежат в одной плоскости, и составить уравнение этой плоскости. (Ответ: $2x - 16y - 13z + 31 = 0$.)

18. Найти проекцию точки $C(3, -4, -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$. (Ответ: $C_1(2, -3, -5)$.)

19. На плоскости Oxy через точку $M(4, -3)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного ею и осями координат, была равна 3. (Ответ: $3x + 2y - 6 = 0$ или $3x + 8y + 12 = 0$.)

20. Нужно восстановить границы квадратного участка земли по трем сохранившимся столбам: один — в центре участка, остальные — на двух противоположных границах. На плане положение центрального столба определено точкой $M(1, 6)$, а боковых — точками $A(5, 9)$ и $B(3, 0)$. Составить уравнения прямых, изображающих границы участка. (Ответ: $x + 2y - 23 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 6 = 0$, $2x - y + 14 = 0$.)

21. Доказать, что уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$ перпендикулярно к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, может быть представлено в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

22. Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит параллельно плоскостям $3x + 12y - 3z - 5 = 0$, $3x - 4y + 9z + 7 = 0$ и пересекает прямые $\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}$, $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$. (Ответ: $x = 8t - 3$, $y = -3t - 1$, $z = -4t + 2$.)

4. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

4.1. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линией (кривой) второго порядка называется множество M точек плоскости, декартовы координаты x, y которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \quad (4.1)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0$ — постоянные действительные числа. Уравнение (4.1) называется *общим уравнением линии второго порядка*.

Рассмотрим частные случаи уравнения (4.1).

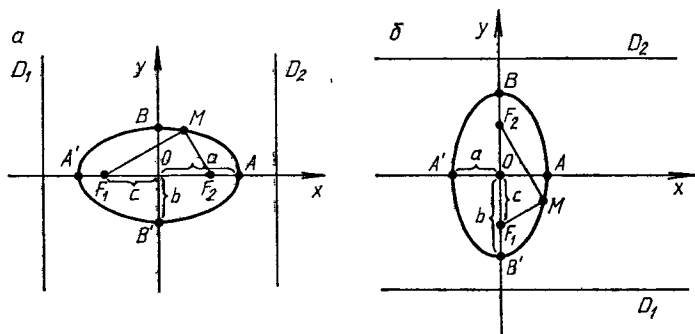
1. Окружность радиусом R с центром в точке $C(x_0, y_0)$ задается уравнением

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (4.2)$$

2. Эллипс с полуосями a и b , центром в начале координат и вершинами A, A', B, B' , расположенными на осях координат, определяется простейшим (каноническим) уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.3)$$

На рис. 4.1, a изображен эллипс, у которого $a > b$ (a — большая полуось, b — малая), а на рис. 4.1, b — эллипс, у которого $a < b$ (a —



Р и с. 4.1

малая полуось, b — большая). Точки F_1 и F_2 называют *фокусами*. По определению любая точка эллипса M удовлетворяет условию $F_1M + F_2M = 2a$ в случае $a > b$ или $F_1M + F_2M = 2b$ в случае $a < b$. Если обозначить $c = OF_1 = OF_2$, то в первом случае $b^2 = a^2 - c^2$, а во втором

$a^2 = b^2 - c^2$. Прямые D_1 и D_2 называются *директрисами эллипса*; их уравнения по определению имеют вид

$$x = \pm a/\varepsilon = \pm a^2/c,$$

если $a > b$, или

$$y = \pm b/\varepsilon = \pm b^2/c,$$

если $a < b$ (см. рис. 4.1). Оси координат являются осями симметрии эллипса.

Число ε , равное отношению расстояния между фокусами F_1F_2 к длине большей оси, называется *эксцентриситетом эллипса*:

$$\varepsilon = c/a \quad (a > b) \quad \text{и} \quad \varepsilon = c/b \quad (a < b).$$

В любом случае $0 \leq \varepsilon < 1$.

3. Гипербола с действительной полуосью a , мнимой полуосью b , центром в начале координат и вершинами A и A' на оси Ox имеет следующее каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.4)$$

На рис. 4.2 изображена гипербола с асимптотами C_1 и C_2 ($y = \pm \frac{b}{a}x$), эксцентриситетом $\varepsilon = c/a$, директрисами D_1 и D_2 ($x = \pm a/\varepsilon$), фокусами $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$. Для гиперболы всегда справедливо равенство $b^2 = c^2 - a^2$, и поэтому $\varepsilon = \sqrt{1 + b^2/a^2} > 1$. Для любой точки M выполняется условие $|F_1M - F_2M| = 2a$, которое может служить определением гиперболы.

Гипербола, уравнение которой имеет вид

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (4.5)$$

называется *сопряженной с гиперболой (4.4)*. Ее вершины находятся в точках B и B' на оси Oy , асимптоты совпадают с асимптотами гиперболы (4.4), $\varepsilon = c/b$ (см. рис. 4.2). Как и в случае эллипса, оси координат являются осями симметрии гиперболы.

4. Парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно оси Ox , имеет следующее каноническое уравнение:

$$y^2 = 2px.$$

Она изображена на рис. 4.3. Точка $F(p/2, 0)$ называется *фокусом*, а прямая D , задаваемая уравнением $x = -p/2$, — *директрисой параболы*. Для любой точки M параболы верно равенство $FM = MN$. Число $p > 0$ называется *параметром параболы*. Ось Ox является ее осью симметрии.

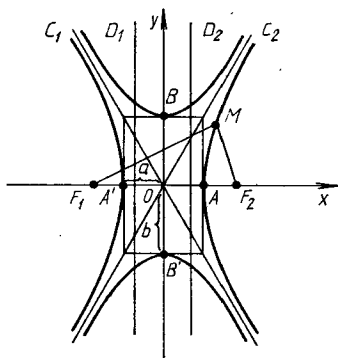
Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ определяют параболы, иначе ориентированные относительно осей координат (рис. 4.4, а—в).

З а м е ч а н и е. Уравнения вида

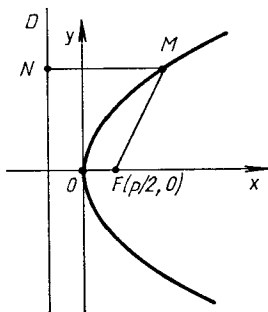
$$\frac{(x - x_0)^2}{2} \pm \frac{(y - y_0)^2}{2} = 1, \quad (y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

определяют соответственно эллипс, гиперболу и параболу, которые параллельно смещены относительно системы координат Oxy таким образом, что центр эллипса и гиперболы и вершина параболы находятся в точке $C(x_0, y_0)$.

Директрисы, фокусы и точки эллипса, гиперболы и параболы обладают одним замечательным свойством: отношение расстояния от любой точки M кривой до фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей выбранному фокусу директрисы есть величина постоянная, равная



Р и с. 4.2



Р и с. 4.3

эксцентриситету кривой. У параболы эксцентриситет следует считать равным 1. Это свойство можно принять за определение кривых второго порядка.

Пример 1. Даны точка $A(1, 0)$ и прямая $x = 2$. В декартовых координатах составить уравнение линии, каждая точка $M(x, y)$ которой: а) в два раза ближе к точке A , чем к данной прямой; б) в два раза дальше от точки A , чем от данной прямой; в) равноудалена от точки A и прямой $x = 2$.

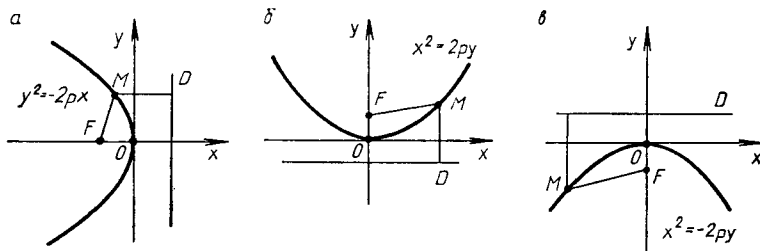
► а) По условию $2MA = MN$ (рис. 4.5). Отсюда, так как $N(2, y)$, то

$$2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}, \quad 4(x^2 - 2x + 1 + y^2) = x^2 - 4x + 4,$$

$$3x^2 + 4y^2 - 4x = 0, \quad 3(x^2 - (4/3)x + 4/9) + 4y^2 = 4/3,$$

$$3(x - 2/3)^2 + 4y^2 = 4/3, \quad \frac{(x - 2/3)^2}{4/9} + \frac{y^2}{1/3} = 1.$$

Следовательно, искомая линия — эллипс. Точка A совпадает с правым его фокусом, а прямая $x = 2$ — правая директриса;



Р и с. 4.4

б) По условию $MA = 2MN$ (рис. 4.6). Следовательно,

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} &= 2\sqrt{(x-2)^2}, \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 &= 4x^2 - 16x + 16, \quad 3x^2 - y^2 - 14x + 15 = 0, \\ 3(x^2 - (14/3)x + 49/9) - y^2 &= 49/3 - 15 = 4/3, \\ \frac{(x - 7/3)^2}{4/9} - \frac{y^2}{4/3} &= 1, \end{aligned}$$

т. е. данная линия — гипербола. Точка A совпадает с ее левым фокусом, $x = 2$ — левая директриса;

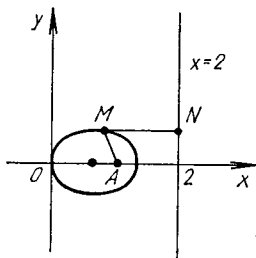


Рис. 4.5

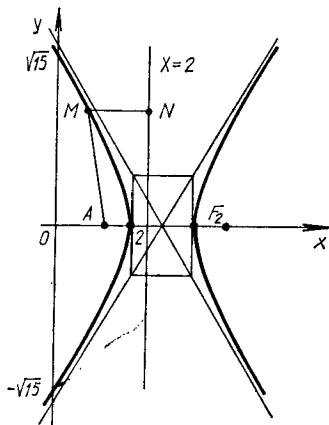


Рис. 4.6

в) По условию $MA = MN$ (рис. 4.7). Следовательно,

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} &= \sqrt{(x-2)^2}, \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 4x + 4, \\ y^2 &= -2x + 3, \quad y^2 = -2(x - 3/2). \end{aligned}$$

Получили уравнение параболы (см. рис. 4.7). Точка A совпадает с фокусом, прямая $x = 2$ — директриса. ◀

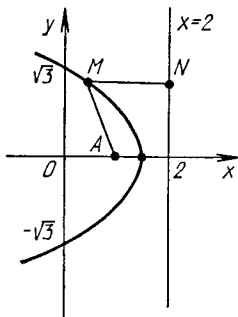


Рис. 4.7

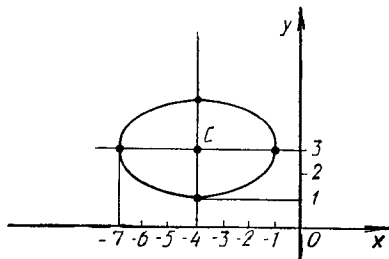


Рис. 4.8

Если общее уравнение (4.1) определяет эллипс, гиперболу или параболу, то поворотом около начала координат осей координат на угол α , определяемый из уравнения $\operatorname{tg} 2\alpha = 2a_{12}/(a_{11} - a_{22})$, и параллельным переносом этих осей всегда можно добиться того, чтобы в новой системе координат уравнения данных кривых стали каноническими.

Особенно простым является приведение уравнения (4.1) к каноническому виду в случае $a_{12} = 0$, когда можно применить *метод выделения полных квадратов*.

Пример 2. Привести к каноническому виду уравнение линии $4x^2 + 9y^2 + 32x - 54y + 109 = 0$ и построить ее.

► Дополним члены, содержащие x , и члены, содержащие y , до полных квадратов. Получим

$$4(x^2 + 8x + 16) + 9(y^2 - 6y + 9) = 64 + 81 - 109 = 36,$$

$$4(x + 4)^2 + 9(y - 3)^2 = 36, \quad \frac{(x + 4)^2}{9} + \frac{(y - 3)^2}{4} = 1,$$

т. е. имеем эллипс, центр которого лежит в точке $C(-4, 3)$, большая полуось $a = 3$, малая полуось $b = 2$ (рис. 4.8). ◀

А3-4.1

1. Дан эллипс, каноническое уравнение которого имеет вид $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Найти координаты его фокусов, эксцентриситет, уравнения директрис. Сделать рисунок. (Ответ: $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$, $e = 0,8$, $x = \pm 25/4$.)

2. По каноническому уравнению гиперболы $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ найти ее полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис. Сделать рисунок.

3. Построить параболу, ее директрису и фокус, зная каноническое уравнение параболы: $x^2 = 6y$.

4. Составить каноническое уравнение эллипса, если известно, что:

а) его малая ось равна 24, расстояние между фокусами равно 10;

б) расстояние между фокусами равно 6, эксцентриситет равен $3/5$;

в) расстояние между фокусами равно 4, расстояние между директрисами равно 5;

г) расстояние между директрисами равно 32, эксцентриситет равен 0,5.

5. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что:

а) расстояние между вершинами равно 8, расстояние между фокусами равно 10;

б) действительная полуось равна 5, вершины делят расстояние между центром и фокусом пополам;

в) действительная ось равна 6, гипербола проходит через точку $A(9, -4)$;

г) точки $P(-5, 2)$ и $Q(2\sqrt{5}, 2)$ лежат на гиперболе.

6. Составить каноническое уравнение параболы, если известно, что:

а) парабола имеет фокус $F(0, 2)$ и вершину в точке $O(0, 0)$;

б) парабола симметрична относительно оси абсцисс и проходит через точки $O(0, 0)$ и $M(1, -4)$;

в) парабола симметрична относительно оси ординат Oy и проходит через точки $O(0, 0)$ и $N(6, -2)$.

7. С помощью выделения полных квадратов и переноса начала координат упростить уравнения линий, определить их тип, размеры и расположение на плоскости (сделать рисунок):

а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$;

б) $2x^2 + 5y^2 + 8x - 10y - 17 = 0$;

в) $x^2 - 6y^2 - 12x + 36y - 48 = 0$;

г) $x^2 - 8x + 2y + 18 = 0$.

Самостоятельная работа

1. Найти уравнение окружности, если концы одного из ее диаметров находятся в точках $A(3, 9)$ и $B(7, 3)$. (Ответ: $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 13$.)

2. Составить уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах эллипса $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$, а фокусы в его вершинах. (Ответ: $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1$.)

3. Составить уравнение траектории движения точки $M(x, y)$, если в любой момент времени она остается равноудаленной от точки $A(8, 4)$ и оси ординат. (Ответ: $(y - 4)^2 = 16(x - 4)$ — парабола.)

4. Записать уравнение траектории движения точки $M(x, y)$, если в любой момент времени она находится в 1,25 раза дальше от точки $A(5, 0)$, чем от прямой $5x - 16 = 0$. (Ответ: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.)

5. Ракета, пуск которой произведен под острым углом к горизонту, описала дугу параболы и упала на расстоянии 60 км от места старта. Зная, что наибольшая высота, достигнутая ракетой, равна 18 км, записать уравнение параболической траектории, приняв место старта за

начало координат, а место падения — лежащим на положительной полуоси Ox , и определить параметр траектории. (Ответ: $(x - 30)^2 = -50(y - 18)$, $p = 25$ км.)

4.2. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, декартовы координаты x, y которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0,$$

где коэффициенты $a_{11}, a_{22}, \dots, a_0$ — постоянные числа. Это уравнение называется *общим уравнением поверхности второго порядка*.

Существует девять классов невырожденных поверхностей второго порядка, канонические уравнения которых можно получить из общего уравнения с помощью преобразований системы координат (параллельного переноса и поворота в пространстве осей координат). В результате этих преобразований получаем следующие канонические уравнения:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{эллипсоиды}), \quad (4.6)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{однополостные гиперboloиды}), \quad (4.7)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (\text{двуполостные гиперboloиды}), \quad (4.8)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad (\text{конусы второго порядка}), \quad (4.9)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad (\text{эллиптические параболоиды}), \quad (4.10)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad (\text{гиперболические параболоиды}), \quad (4.11)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{эллиптические цилиндры}), \quad (4.12)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{гиперболические цилиндры}), \quad (4.13)$$

$$x^2 = 2py \quad (\text{параболические цилиндры}). \quad (4.14)$$

Здесь параметры a, b, c, p — постоянные и положительные числа, характеризующие в определенном смысле свойства поверхностей.

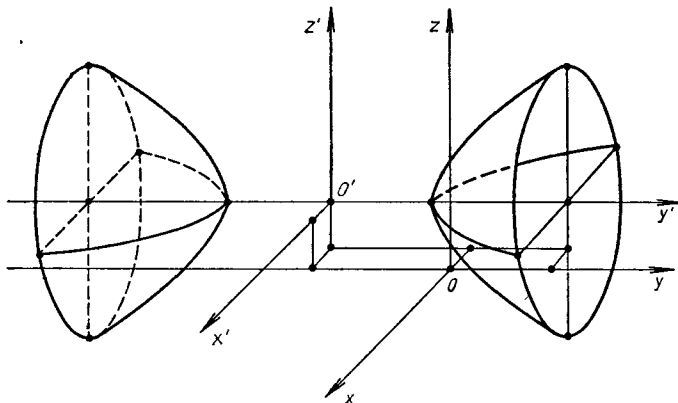
Получение канонического уравнения из общего является довольно сложной процедурой, но в случае отсутствия членов с xy, xz, yz ($a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$) приведение общего уравнения к каноническому виду достигается (как и в случае линий второго порядка) методом выделения полных квадратов и параллельным переносом осей координат.

Пример 1. Привести к каноническому виду уравнение $x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 2x - 12y - 8z - 3 = 0$, выяснить тип, свойства и расположение заданной этим уравнением поверхности относительно системы координат $Oxyz$.

► Выделив полные квадраты при входящих в уравнение переменных (т. е. сгруппировав члены уравнения указанным ниже образом), имеем:

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x + 1 - 1) - 2(y^2 + 6y + 9 - 9) + 4(z^2 - 2z + 1 - 1) - 3 &= 0, \\(x + 1)^2 - 2(y + 3)^2 + 4(z - 1)^2 &= 3 + 1 - 18 + 4 = -10, \\ \frac{(x + 1)^2}{10} - \frac{(y + 3)^2}{5} + \frac{(z - 1)^2}{5/2} &= -1.\end{aligned}$$

При параллельном переносе осей координат, задаваемом формулами: $x' = x + 1$, $y' = y + 3$, $z' = z - 1$, начало координат новой сн-



Р и с. 4.9

стемы окажется в точке $O'(-1, -3, 1)$, а уравнение поверхности примет канонический вид

$$\frac{x'^2}{10} - \frac{y'^2}{5} + \frac{z'^2}{5/2} = -1.$$

Следовательно, данная поверхность — двуполостный гиперболоид, который имеет $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{5/2}$, вытянут вдоль новой оси $O'y'$, а центр его находится в точке $O'(-1, -3, 1)$ (рис. 4.9). ◀

Форма и свойства всех перечисленных выше поверхностей второго порядка (4.6) — (4.14) устанавливаются с помощью *метода параллельных сечений*. Суть метода состоит в том, что поверхности пересекаются плоскостями, параллельными координатным плоскостям, а затем по виду и свойствам получаемых в сечениях линий делается вывод о форме и свойствах самой поверхности.

Пример 2. Установить форму и свойства однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$. Сделать рисунок.

► Будем пересекать поверхность горизонтальными плоскостями $z = h$. Из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} &= 1 + \frac{h^2}{9}, \\ z &= h \end{aligned} \right\}$$

видно, что в любом таком сечении получается эллипс с полуосями $a_1 = 4\sqrt{1 + h^2/9}$, $b_1 = 2\sqrt{1 + h^2/9}$. Сечение плоскостями $x = h$ дает гиперболы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} &= 1 - \frac{h^2}{4}, \\ x &= h, \end{aligned} \right\}$$

а сечение плоскостями $y = h$ — гиперболы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{9} &= 1 - \frac{h^2}{4}, \\ y &= h \end{aligned} \right\}$$

(только с другими полуосями).

При $h = 0$ получим сечения поверхности (однополостного гиперболоида) координатными плоскостями $z = 0$, или $x = 0$, или $y = 0$. Эти сечения называются *главными* (рис. 4.10). Размеры главных сечений очевидны: в плоскости $z = 0$ эллипс имеет полуоси $a = 4$, $b = 2$; в плоскости $x = 0$ гипербола имеет действительную полуось $b = 2$, мнимую $c = 3$; в плоскости $y = 0$ гипербола имеет действительную полуось $a = 4$, мнимую $c = 3$. Координатные плоскости являются плоскостями симметрии поверхности. ◀

В инженерных задачах часто встречаются различные *поверхности вращения*, т. е. поверхности, получаемые вращением некоторой плоской линии вокруг заданной прямой (называемой *осью поверхности вращения*), лежащей с этой линией в одной плоскости.

Если линия лежит в плоскости Oyz и имеет уравнения $F(y, z) = 0$, $x = 0$, то при вращении ее вокруг оси Oz получаем поверхность вращения, уравнение которой имеет вид $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$; если вращение совершать вокруг оси Oy , то уравнение поверхности вращения (другой!) запишется в виде $F(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$.

Пример 3. Записать уравнение поверхности вращения, полученной при вращении гиперболы $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$: а) вокруг оси Oz ; б) вокруг оси Oy .

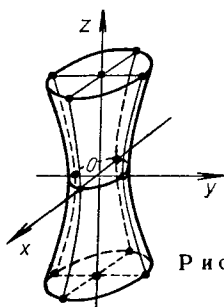
► а) Согласно изложенному выше правилу, в уравнении гиперболы заменяем y на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ и получаем уравнение поверхности вращения:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

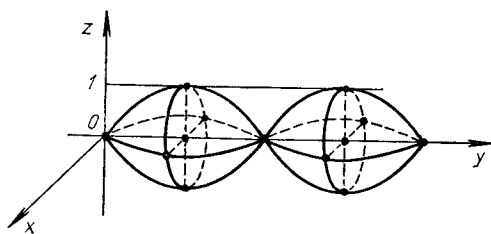
Это однополостный гиперболоид вращения, у которого в горизонтальных сечениях вместо эллипсов лежат окружности (см. пример 2);

б) При вращении данной гиперболы вокруг оси Oy следует в ее уравнении заменить z на $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$. Тогда имеем:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2 + z^2}{b^2} = 1 \text{ или } \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = -1.$$



Р и с. 4.10



Р и с. 4.11

Это двуполостный гиперболоид вращения, вытянутый вдоль оси Oy (см. пример 1), сечения которого плоскостями $y = h > a$ представляют собой окружности, а не эллипсы, как в примере 1. ◀

Пример 4. Составить уравнение поверхности, полученной вращением дуги синусоиды $z = \sin y$, $x = 0$ ($0 \leq y \leq 2\pi$) вокруг оси Oy .

► Имейем:

$$z = \sin(\pm \sqrt{x^2 + y^2}), \quad z = \pm \sin \sqrt{x^2 + y^2}$$

(рис. 4.11). ◀

А3-4.2

1. Методом параллельных сечений исследовать форму поверхности и построить ее:

- а) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 2$; б) $2x^2 - 9y^2 - z^2 = 36$;
 в) $-2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 0$; г) $2y^2 + z^2 = 2x$;
 д) $z^2 - y^2 = x$; е) $2x^2 + 4z^2 = 4$; ж) $y^2 - 6z = 0$.

2. Определить вид поверхности и построить ее:

- а) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$;
 б) $36x^2 + 16y^2 - 9z^2 + 18z = 9$;
 в) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$;
 г) $5x^2 + y^2 + 10x - 6y - 10z + 14 = 0$;
 д) $x^2 + 3z^2 - 8x + 18z + 34 = 0$.

3. Построить тело, ограниченное поверхностями:

- а) $x^2 = z$, $z = 0$, $2x - y = 0$, $x + y = 9$;
 б) $z^2 = 4 - y$, $x^2 + y^2 = 4y$;
 в) $z = y^2$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$;
 г) $z = y$, $z = 0$, $y = \sqrt{4 - x}$, $y = \frac{1}{2}(x - 1)$.

Самостоятельная работа

Построить тело, ограниченное указанными поверхностями.

1. $z = 4 - x^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$.
2. $z = 2x^2 + y^2$, $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.
3. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z + 1 = x^2 + y^2$ ($z \geq -1$).
4. $x^2 + y^2 = z$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.

4.3. ЛИНИИ, ЗАДАННЫЕ УРАВНЕНИЯМИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ УРАВНЕНИЯМИ

Полярные координаты точки и уравнение линии в полярных координатах. Положение некоторой точки M на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат Oxy определяется числами x и y , т. е. $M(x, y)$ (рис. 4.12). Эту точку можно задать и другим способом,

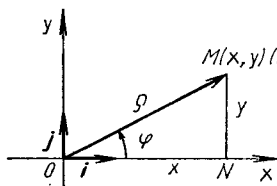


Рис. 4.12

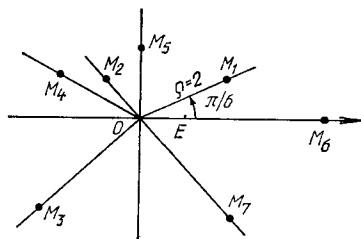


Рис. 4.13

например с помощью расстояния $\rho = |\overrightarrow{OM}|$ и угла φ , отсчитываемого против хода часовой стрелки от оси Ox , называемой *полярной осью*, до радиуса-вектора \overrightarrow{OM} . В этом случае используется запись $M(\rho; \varphi)$. Расстояние ρ называется *полярным радиусом*, φ — *полярным углом* точки M , а точка O — *полюсом*.

Связь между декартовыми x, y и полярными ρ, φ координатами точки M при указании расположения осей Ox и Oy , вектора \overrightarrow{OM} и угла φ выражается формулами:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi, \quad \rho \geq 0, \\ y &= \rho \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

(см. рис. 4.12). С помощью формул (4.15) можно находить декартовы координаты точки M по ее полярным координатам. Если эти формулы разрешить относительно ρ и φ , то получим формулы:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (4.16)$$

с помощью которых по декартовым координатам точки M легко найти ее полярные координаты.

Формулы (4.15) и (4.16) дают также возможность переходить от уравнений линий, заданных в декартовых координатах, к их уравнениям в полярных координатах, и наоборот.

Пример 1. Построить точки, заданные полярными координатами: $M_1(2; \pi/6)$, $M_2(1; 3\pi/4)$, $M_3(3; 5\pi/4)$, $M_4(2; 5\pi/6)$, $M_5(3/2; \pi/2)$, $M_6(4; 0)$, $M_7(3; 7\pi/4)$.

► Вначале проведем луч под углом φ к полярной оси Ox , затем на построенном луче отложим от полюса O отрезок длиной ρ . В итоге найдем все семь точек (рис. 4.13). Отрезок OE определяет единицу длины. ◀

Пример 2. Найти декартовы координаты точек M_1, \dots, M_7 , заданных в примере 1.

► В соответствии с формулами (4.15) имеем: $M_1(\sqrt{3}, 1)$, $M_2(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $M_3(-3\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/2)$, $M_4(-\sqrt{3}, 1)$, $M_5(0, 3/2)$, $M_6(4, 0)$, $M_7(3\sqrt{2}/2, -3\sqrt{2}/2)$. ◀

Пример 3. Точки заданы декартовыми координатами: $A(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $B(0, -3)$, $C(\sqrt{3}, 1)$. Построить эти точки и найти их полярные координаты.

► Согласно формулам (4.16), получаем: для точки A $\rho = 2$, $\operatorname{tg} \varphi = -1$, $\varphi = 7\pi/4$, т. е. $A(2; 7\pi/4)$; для точки B $\rho = 3$, $\sin \varphi = -1$, $\varphi = 3\pi/2$, значит, $B(3; 3\pi/2)$; для точки C $\rho = 2$, $\operatorname{tg} \varphi = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$, $\varphi = \pi/6$, т. е. $C(2; \pi/6)$ (рис. 4.14). ◀

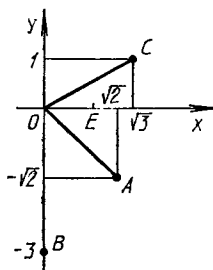


Рис. 4.14

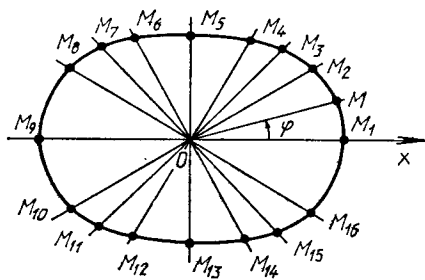


Рис. 4.15

Пример 4. Записать уравнение линии $(x^2 + y^2)^{3/2} = 4(x^2 - 3y^2)$ в полярных координатах.

► Воспользовавшись формулами (4.15), подставим в данное уравнение вместо x и y их выражения. Получим

$$\rho^3 = 4(\rho^2 \cos^2 \varphi - 3\rho^2 \sin^2 \varphi).$$

Считая $\rho \neq 0$, преобразуем последнее уравнение:

$$\begin{aligned} \rho &= 4(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi - 2 \sin^2 \varphi), \\ \rho &= 4(\cos 2\varphi - 1 + \cos 2\varphi), \quad \rho = 4(2 \cos 2\varphi - 1). \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 5. Записать уравнение линии $\rho^2 = 8 \sin^2 2\varphi$ в декартовых координатах.

► Так как $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$, данное уравнение можно переписать в виде $\rho^2 = 32 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$ и заменить ρ , $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ их выражениями (см. формулы (4.16)). Тогда найдем:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2 + y^2})^2 &= 32 \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2, \\ (x^2 + y^2)^2 &= 32x^2y^2. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 6. Построить кривую, заданную уравнением $\rho = 2 + \cos^2 \varphi$.

► Составим таблицу, в которой указаны значения φ_i и соответствующие им значения ρ_i ($i = \overline{1, 16}$):

φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i
0	3	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{11}{4}$	$\frac{3}{2}\pi$	2	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{11}{4}$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	2	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{11}{4}$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{9}{4}$	2 π	3
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{9}{4}$	π	3	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{5}{2}$		

Построив найденные точки $M_i(\rho_i, \varphi_i)$ (см. пример 1) и соединив их плавной линией, получим достаточно точный график искомой кривой (рис. 4.15). ◀

Параметрические уравнения линии. Уравнения вида

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2, \\ z &= f_3(t), \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ — некоторые функции параметра t , называются *параметрическими уравнениями линии в пространстве*. В частном случае, когда $f_3(t) \equiv 0$ (или $f_1(t) \equiv 0$, или $f_2(t) \equiv 0$), получаем параметрические уравнения линии на плоскости $z = 0$ (или $x = 0$, или $y = 0$). Следует отметить, что уравнения (4.17) задают не только линию, но и «закон движения» точки $M(x, y, z)$ по этой линии: каждому значению параметра t соответствует определенное положение точки на линии.

Пример 7. Выяснить, какая линия определяется параметрическими уравнениями

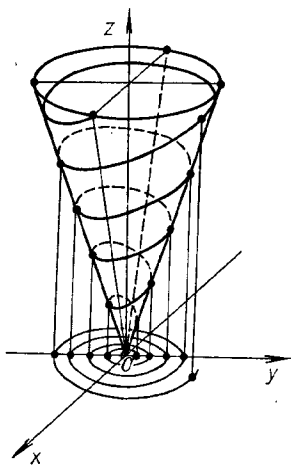
$$\left. \begin{aligned} x &= at \cos t, \\ y &= at \sin t, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad t \geq 0. \\ z &= bt, \end{aligned} \right\}$$

► Это спиральная винтовая линия, проекция которой на плоскость $z = 0$ является спиралью Архимеда $\rho = a\varphi$ (рис. 4.16). ◀

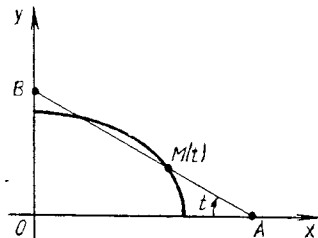
Пример 8. Выяснить, какую линию задают указанные параметрические уравнения

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin^2 t, \quad a > 0, \\ y &= b \cos^2 t, \quad b > 0, \quad -\infty < t < \infty. \\ z &= 0, \end{aligned} \right\}$$

► Это отрезок прямой, концы которого лежат на осях координат в точках $A(a, 0)$ и $B(0, b)$. При изменении t в интервале $(-\infty; +\infty)$ точка $M(t)$ отрезка AB бесчисленное множество раз «пробегает» этот отрезок (рис. 4.17). ◀



Р и с. 4.16



Р и с. 4.17

Если из параметрических уравнений (4.17) удастся исключить параметр t , получают уравнения линии в декартовых координатах. Для пространственной линии имеем пару уравнений, каждое из которых определяет цилиндрическую поверхность, а их пересечение дает саму линию. Например, спиральную винтовую линию (см. пример 7) можно представить следующей парой уравнений цилиндрических поверхностей ($t = z/b$):

$$x = \frac{a}{b} z \cos \frac{z}{b}, \quad y = \frac{a}{b} z \sin \frac{z}{b}, \quad z \geq 0.$$

Для плоской линии, лежащей в некоторой координатной плоскости, исключение параметра t также приводит к паре уравнений в декартовых координатах, но одно из них всегда является уравнением координатной плоскости, в которой лежит сама линия. Уравнение координатной плоскости часто опускают. Так, в примере 8 уравнение отрезка AB можно представить следующей парой уравнений в декартовых координатах:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad z = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Пример 9. Построить линию, заданную параметрическими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= 0, \\ y &= t - 1/t + 2, \\ z &= t + 1/t - 3. \end{aligned} \right\}$$

► Данная линия лежит в координатной плоскости Oyz . Придавая различные значения параметру t , можно получить достаточное количество точек линии, по которым она строится. Чтобы более точно изучить эту линию, воспользуемся методом исключения параметра. Перенесем числа 2 и -3 во втором и третьем уравнениях системы в левую часть. Возведем обе части уравнений в квадрат и из $(z + 3)^2$ вычтем $(y - 2)^2$. Тогда:

$$\begin{aligned} (z + 3)^2 - (y - 2)^2 &= (t + 1/t)^2 - (t - 1/t)^2 = 4, \\ \frac{(z + 3)^2}{4} - \frac{(y - 2)^2}{4} &= 1. \end{aligned}$$

Следовательно, в координатной плоскости $x = 0$ имеем равнобочную гиперболу ($a = b = 2$) с центром в точке $C(0, 2, -3)$, изображенную на рис. 4.18. ◀

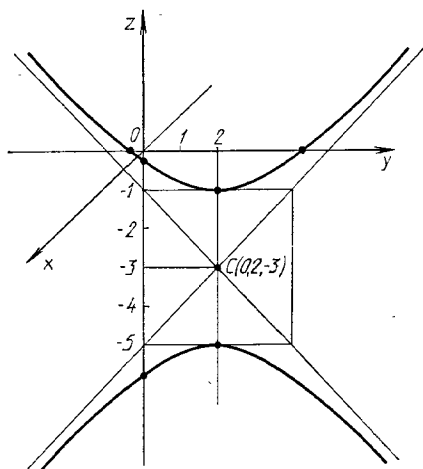


Рис. 4.18

А3-4.3

1. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах. Записать их в декартовых координатах:

- 1) $\rho = 5$; 2) $\varphi = \pi/3$;
- 3) $\rho = a\varphi$ (спираль Архимеда);
- 4) $\rho = 6 \cos \varphi$; 5) $\rho = 10 \sin \varphi$;
- 6) $\rho \cos \varphi = 2$; 7) $\rho \sin \varphi = 1$;

- 8) $\rho = \frac{4}{1 - \cos \varphi}$ (парабола);
 9) $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ (кардиоида);
 10) $\rho = 3/\varphi$ (гиперболическая спираль);
 11) $\rho = 2^\varphi, \rho = (1/2)^\varphi$ (логарифмические спирали);
 12) $\rho = a \sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза);
 13) $\rho = a \sin^2 2\varphi$ (четырёхлепестковая роза);
 14) $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (лемниската Бернулли).

2. Составить в полярных координатах уравнения следующих линий:

а) прямой, перпендикулярной к полярной оси и отсекающей на ней отрезок, равный 3;

б) прямых, параллельных полярной оси и отстоящих от нее на расстоянии 5;

в) окружности радиусом $R = 4$ с центром на полярной оси и проходящей через полюс;

г) окружностей радиусом $R = 3$, касающихся полярной оси в полюсе.

(Ответ: а) $\rho \cos \varphi = 3$; б) $\rho \sin \varphi = \pm 5$; в) $\rho = 8 \cos \varphi$; г) $\rho = \pm 6 \sin \varphi$.)

3. Построить следующие линии, заданные параметрическими уравнениями:

- 1) $x = 3t - 1, y = -2t + 5$;
 2) $x = 3 \cos t + 3, y = 3 \sin t - 2$;
 3) $x = 5 + 4 \cos t, y = -1 + \sin t$;
 4) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ (циклоида);
 5) $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ (астроида);
 6) $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ (винтовая линия);
 7) $x = \frac{a}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right), y = \frac{b}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$.

Самостоятельная работа

1. Исключив параметр t из данных параметрических уравнений линий на плоскости, записать их уравнения в декартовых координатах $F(x, y) = 0$, определить тип каждой линии и ее расположение на плоскости:

- 1) $x = a/\cos t, y = b \operatorname{tg} t$ (гипербола);
 2) $x = 2a \cos^2 t, y = a \sin 2t$ (окружность);
 3) $x = a \sin 2t, y = 2a \sin^2 t$ (окружность);
 4) $x = -2 + 3 \sin 2t, y = 1 + \cos 2t$ (эллипс);
 5) $x = 4(1 - t), y = 2\sqrt{t}$ (часть параболы, для которой $y \geq 0$).

2. Построить линии, записав их уравнения в полярных координатах:

- 1) $x^2 + y^2 = 5(\sqrt{x^2 + y^2} - x)$;
2) $x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)^3$; 3) $(x^2 + y^2)^2 = y^2$;
4) $3x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)^{3/2}$; 5) $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.

4.4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 4

ИДЗ-4.1

1. Составить канонические уравнения: а) эллипса; б) гиперболы; в) параболы (A, B — точки, лежащие на кривой, F — фокус, a — большая (действительная) полуось, b — малая (мнимая) полуось, ε — эксцентриситет, $y = \pm kx$ — уравнения асимптот гиперболы, D — директриса кривой, $2c$ — фокусное расстояние).

1.1. а) $b = 15$, $F(-10, 0)$; б) $a = 13$, $\varepsilon = 14/13$;
в) $D: x = -4$.

1.2. а) $b = 2$, $F(4\sqrt{2}, 0)$; б) $a = 7$, $\varepsilon = \sqrt{85}/7$; в) $D: x = 5$.

1.3. а) $A(3, 0)$, $B(2, \sqrt{5}/3)$; б) $k = 3/4$, $\varepsilon = 5/4$;
в) $D: y = -2$.

1.4. а) $\varepsilon = \sqrt{21}/5$, $A(-5, 0)$; б) $A(\sqrt{80}, 3)$, $B(4\sqrt{6}, 3\sqrt{2})$; в) $D: y = 1$.

1.5. а) $2a = 22$, $\varepsilon = \sqrt{57}/11$; б) $k = 2/3$, $2c = 10\sqrt{13}$;
в) ось симметрии Ox и $A(27, 9)$.

1.6. а) $b = \sqrt{15}$, $\varepsilon = \sqrt{10}/25$; б) $k = 3/4$, $2a = 16$;
в) ось симметрии Ox и $A(4, -8)$.

1.7. а) $a = 4$, $F = (3, 0)$; б) $b = 2\sqrt{10}$, $F(-11, 0)$;
в) $D: x = -2$.

1.8. а) $b = 4$, $F = (9, 0)$; б) $a = 5$, $\varepsilon = 7/5$; в) $D: x = 6$.

1.9. а) $A(0, \sqrt{3})$, $B(\sqrt{14}/3, 1)$; б) $k = \sqrt{21}/10$, $\varepsilon = 11/10$; в) $D: y = -4$.

1.10. а) $\varepsilon = 7/8$, $A(8, 0)$; б) $A(3, -\sqrt{3}/5)$, $B(\sqrt{13}/5, 6)$;
в) $D: y = 4$.

1.11. а) $2a = 24$, $\varepsilon = \sqrt{22}/6$; б) $k = \sqrt{2}/3$, $2c = 10$;
в) ось симметрии Ox и $A(-7, -7)$.

1.12. а) $b = 2$, $\varepsilon = 5\sqrt{29}/29$; б) $k = 12/13$, $2a = 26$;
в) ось симметрии Ox и $A(-5, 15)$.

1.13. а) $a = 6$, $F(-4, 0)$; б) $b = 3$, $F(7, 0)$; в) $D: x = -7$.

1.14. а) $b = 7$, $F(5, 0)$; б) $a = 11$, $\varepsilon = 12/11$; в) $D: x = 10$.

1.15. а) $A(-\sqrt{17/3}, 1/3)$, $B(\sqrt{21}/2, 1/2)$; б) $k = 1/2$, $\varepsilon = \sqrt{5}/2$; в) $D: y = -1$.

1.16. а) $\varepsilon = 3/5$, $A(0, 8)$; б) $A(\sqrt{6}, 0)$, $B(-2\sqrt{2}, 1)$; в) $D: y = 9$.

1.17. а) $2a = 22$, $\varepsilon = 10/11$; б) $k = \sqrt{11}/5$, $2c = 12$; в) ось симметрии Ox и $A(-7, 5)$.

1.18. а) $b = 5$, $\varepsilon = 12/13$; б) $k = 1/3$, $2a = 6$; в) ось симметрии Oy и $A(-9, 6)$.

1.19. а) $a = 9$, $F(7, 0)$; б) $b = 6$, $F(12, 0)$; в) $D: x = -1/4$.

1.20. а) $b = 5$, $F(-10, 0)$; б) $a = 9$, $\varepsilon = 4/3$; в) $D: x = 12$.

1.21. а) $A(0, -2)$, $B(\sqrt{15}/2, 1)$; б) $k = 2\sqrt{10}/9$, $\varepsilon = 11/9$; в) $D: y = 5$.

1.22. а) $\varepsilon = 2/3$, $A(-6, 0)$; б) $A(\sqrt{8}, 0)$, $B(\sqrt{20}/3, 2)$; в) $D: y = 1$.

1.23. а) $2a = 50$, $\varepsilon = 3/5$; б) $k = \sqrt{29}/14$, $2c = 30$; в) ось симметрии Oy и $A(4, 1)$.

1.24. а) $b = 2\sqrt{15}$, $\varepsilon = 7/8$; б) $k = 5/6$, $2a = 12$; в) ось симметрии Oy и $A(-2, 3\sqrt{2})$.

1.25. а) $a = 13$, $F(-5, 0)$; б) $b = 44$, $F(-7, 0)$; в) $D: x = -3/8$.

1.26. а) $b = 7$, $F(13, 0)$; б) $b = 4$, $F(-11, 0)$; в) $D: x = 13$.

1.27. а) $A(-3, 0)$, $B(1, \sqrt{40}/3)$; б) $k = \sqrt{2}/3$, $\varepsilon = \sqrt{15}/3$; в) $D: y = 4$.

1.28. а) $\varepsilon = 5/6$, $A(0, -\sqrt{11})$; б) $A(\sqrt{32}/3, 1)$, $B(\sqrt{8}, 0)$; в) $D: y = -3$.

1.29. а) $2a = 30$, $\varepsilon = 17/15$; б) $k = \sqrt{17}/8$, $2c = 18$; в) ось симметрии Oy и $A(4, -10)$.

1.30. а) $b = 2\sqrt{2}$, $\varepsilon = 7/9$; б) $k = \sqrt{2}/2$, $2a = 12$; в) ось симметрии Oy и $A(-45, 15)$.

2. Записать уравнение окружности, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке A .

2.1. Вершины гиперболы $12x^2 - 13y^2 = 156$, $A(0, -2)$.

2.2. Вершины гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36$, $A(0, 4)$.

2.3. Фокусы гиперболы $24y^2 - 25x^2 = 600$, $A(0, -8)$.

2.4. $O(0, 0)$, A — вершина параболы $y^2 = 3(x - 4)$.

2.5. Фокусы эллипса $9x^2 + 25y^2 = 1$, $A(0, 6)$.

2.6. Левый фокус гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$, $A(0, -3)$.

2.7. Фокусы эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$, A — его верхняя вершина.

2.8. Вершину гиперболы $x^2 - 16y^2 = 64$, $A(0, -2)$.

2.9. Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 80$, $A(0, -4)$.

2.10. $O(0, 0)$, A — вершина параболы $y^2 = -(x + 5)/2$.

2.11. Правый фокус эллипса $33x^2 + 49y^2 = 1617$, $A(1, 7)$.

2.12. Левый фокус гиперболы $3x^2 - 5y^2 = 30$, $A(0, 6)$.

2.13. Фокусы эллипса $16x^2 + 41y^2 = 656$, A — его нижняя вершина.

2.14. Вершину гиперболы $2x^2 - 9y^2 = 18$, $A(0, 4)$.

2.15. Фокусы гиперболы $5x^2 - 11y^2 = 55$, $A(0, 5)$.

2.16. $B(1, 4)$, A — вершина параболы $y^2 = (x - 4)/3$.

2.17. Левый фокус эллипса $3x^2 + 7y^2 = 21$, $A(-1, -3)$.

2.18. Левую вершину гиперболы $5x^2 - 9y^2 = 45$, $A(0, -6)$.

2.19. Фокусы эллипса $24x^2 - 25y^2 = 600$, A — его верхняя вершина.

2.20. Правую вершину гиперболы $3x^2 - 16y^2 = 48$, $A(1, 3)$.

2.21. Левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$, $A(-1, -2)$.

2.22. $B(2, -5)$, A — вершина параболы $x^2 = -2(y + 1)$.

2.23. Правый фокус эллипса $x^2 + 4y^2 = 12$, $A(2, -7)$.

2.24. Правую вершину гиперболы $40x^2 - 81y^2 = 3240$, $A(-2, 5)$.

2.25. Фокусы эллипса $x^2 + 10y^2 = 90$, A — его нижняя вершина.

2.26. Правую вершину гиперболы $3x^2 - 25y^2 = 75$, $A(-5, -2)$.

2.27. Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20$, $A(0, -6)$.

2.28. $B(3, 4)$, A — вершина параболы $y^2 = (x + 7)/4$.

2.29. Левый фокус эллипса $13x^2 + 49y^2 = 837$, $A(1, 8)$.

2.30. Правый фокус гиперболы $57x^2 - 64y^2 = 3648$, $A(2, 8)$.

3. Составить уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет заданным условиям.

3.1. Отстоит от прямой $x = -6$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(1, 3)$.

3.2. Отстоит от прямой $x = -2$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(4, 0)$.

3.3. Отстоит от прямой $y = -2$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $A(5, 0)$.

3.4. Отношение расстояний от точки M до точек $A(2, 3)$ и $B(-1, 2)$ равно $3/4$.

3.5. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(4, 0)$ и $B(-2, 2)$ равна 28.

3.6. Отстоит от точки $A(1, 0)$ на расстоянии, в пять раз меньше, чем от прямой $x = 8$.

3.7. Отстоит от точки $A(4, 1)$ на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки $B(-2, -1)$.

3.8. Отстоит от прямой $x = -5$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $A(6, 1)$.

3.9. Отстоит от прямой $y = 7$ на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки $A(4, -3)$.

3.10. Отношение расстояний от точки M до точек $A(-3, 5)$ и $B(4, 2)$ равно $1/3$.

3.11. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-5, -1)$ и $B(3, 2)$ равна 40,5.

3.12. Отстоит от точки $A(2, 1)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой $x = -5$.

3.13. Отстоит от точки $A(-3, 3)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $B(5, 1)$.

3.14. Отстоит от прямой $x = 8$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(-1, 7)$.

3.15. Отстоит от прямой $x = 9$ на расстоянии, в четыре раза меньше, чем от точки $A(-1, 2)$.

3.16. Отношение расстояний от точки M до точек $A(2, -4)$ и $B(3, 5)$ равно $2/3$.

3.17. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-3, 3)$ и $B(4, 1)$ равна 31.

3.18. Отстоит от точки $A(0, -5)$ на расстоянии, в два раза меньше, чем от прямой $x = 3$.

3.19. Отстоит от точки $A(4, -2)$ на расстоянии, в два раза меньше, чем от точки $B(1, 6)$.

3.20. Отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии, в три раза меньше, чем от точки $A(1, 4)$.

3.21. Отстоит от прямой $x = 14$ на расстоянии, в два раза меньше, чем от точки $A(2, 3)$.

3.22. Отношение расстояний от точки M до точек $A(3, -2)$ и $B(4, 6)$ равно $3/5$.

3.23. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-5, 3)$ и $B(2, -4)$ равна 65 .

3.24. Отстоит от точки $A(3, -4)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой $x = 5$.

3.25. Отстоит от точки $A(5, 7)$ на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки $B(-2, 1)$.

3.26. Отстоит от прямой $x = 2$ на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки $A(4, -3)$.

3.27. Отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии, в три раза меньшем, чем от точки $A(3, 1)$.

3.28. Отношение расстояний от точки M до точек $A(3, -5)$ и $B(4, 1)$ равно $1/4$.

3.29. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-1, 2)$ и $B(3, -1)$ равна $18,5$.

3.30. Отстоит от точки $A(1, 5)$ на расстоянии, в четыре раза меньшем, чем от прямой $x = -1$.

4. Построить кривую, заданную уравнением в полярной системе координат.

4.1. $\rho = 2 \sin 4\varphi$.

4.2. $\rho = 2(1 - \sin 2\varphi)$.

4.3. $\rho = 2 \sin 2\varphi$.

4.4. $\rho = 3 \sin 6\varphi$.

4.5. $\rho = 2/(1 + \cos \varphi)$.

4.6. $\rho = 3(1 + \sin \varphi)$.

4.7. $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$.

4.8. $\rho = 3(1 - \cos 2\varphi)$.

4.9. $\rho = 4 \sin 3\varphi$.

4.10. $\rho = 4 \sin 4\varphi$.

4.11. $\rho = 3(\cos \varphi + 1)$.

4.12. $\rho = 1/(2 - \sin \varphi)$.

4.13. $\rho = 5(1 - \sin 2\varphi)$.

4.14. $\rho = 3(2 - \cos 2\varphi)$.

4.15. $\rho = 6 \sin 4\varphi$.

4.16. $\rho = 2 \cos 6\varphi$.

4.17. $\rho = 3/(1 - \cos 2\varphi)$.

4.18. $\rho = 2(1 - \cos 3\varphi)$.

4.19. $\rho = 3(1 - \cos 4\varphi)$.

4.20. $\rho = 5(2 - \sin \varphi)$.

4.21. $\rho = 3 \sin 4\varphi$.

4.22. $\rho = 2 \cos 4\varphi$.

4.23. $\rho = 4(1 + \cos 2\varphi)$.

4.24. $\rho = 1/(2 - \cos 2\varphi)$.

4.25. $\rho = 4(1 - \sin \varphi)$.

4.26. $\rho = 3(1 + \cos 2\varphi)$.

4.27. $\rho = 3 \cos 2\varphi$.

4.28. $\rho = 2 \sin 3\varphi$.

4.29. $\rho = 2/(2 - \cos \varphi)$.

4.30. $\rho = 2 - \cos 2\varphi$.

5. Построить кривую, заданную параметрическими уравнениями ($0 \leq t \leq 2\pi$).

5.1. $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} x = 4 \cos 2t, \\ y = 3 \sin 2t. \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} x = 2 \sin t, \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 5 \sin t. \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$

- 5.7. $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 5 \sin t. \end{cases}$
- 5.8. $\begin{cases} x = 5 \cos^3 t, \\ y = 5 \sin^3 t. \end{cases}$
- 5.9. $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 3 \sin 2t. \end{cases}$
- 5.10. $\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 1 - \sin t. \end{cases}$
- 5.11. $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 4 \sin t. \end{cases}$
- 5.12. $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 5 \sin^3 t. \end{cases}$
- 5.13. $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 5 \sin t. \end{cases}$
- 5.14. $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$
- 5.15. $\begin{cases} x = 3 \cos 2t, \\ y = 2 \sin 2t. \end{cases}$
- 5.16. $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2(1 - \sin t). \end{cases}$
- 5.17. $\begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$
- 5.18. $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 5 \sin^3 t. \end{cases}$
- 5.19. $\begin{cases} x = 4 \cos 2t, \\ y = \sin 2t. \end{cases}$
- 5.20. $\begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t. \end{cases}$
- 5.21. $\begin{cases} x = 4 \cos 3t, \\ y = 2 \sin 3t. \end{cases}$
- 5.22. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3(2 - \sin t). \end{cases}$
- 5.23. $\begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 5 \sin t. \end{cases}$
- 5.24. $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$
- 5.25. $\begin{cases} x = 3 \cos 2t, \\ y = 3 \sin 2t. \end{cases}$
- 5.26. $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$
- 5.27. $\begin{cases} x = 5 \cos 3t, \\ y = \sin 3t. \end{cases}$
- 5.28. $\begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 4(1 - \sin t). \end{cases}$
- 5.29. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$
- 5.30. $\begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$

Решение типового варианта

1. Составить канонические уравнения: а) эллипса, большая полуось которого равна 3, а фокус находится в точке $F(\sqrt{5}, 0)$; б) гиперболы с мнимой полуосью, равной 2, и фокусом $F(-\sqrt{13}, 0)$; в) параболы, имеющей директрису $x = -3$.

► а) Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. По условию задачи большая полуось $a = 3$, $c = \sqrt{5}$. Для эллипса выполняется равенство $b^2 = a^2 - c^2$. Подставив в него значения a и c , найдем $b^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4$. Искомое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1;$$

б) Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. По условию мнимая полуось $b = 2$, а $c = \sqrt{13}$. Для гиперболы справедливо равенство $b^2 = c^2 - a^2$. Поэтому $a^2 = c^2 - b^2 = (\sqrt{13})^2 - 2^2 = 9$. Записываем искомое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1;$$

в) Каноническое уравнение параболы в данном случае должно иметь вид $y^2 = 2px$, а уравнение ее директрисы $x = -p/2$. Но по условию задачи уравнение директрисы $x = -3$. Поэтому $-p/2 = -3$, $p = 6$ и искомое каноническое уравнение параболы имеет вид

$$y^2 = 12x. \quad \blacktriangleleft$$

2. Записать уравнение окружности, проходящей через фокусы эллипса $x^2 + 4y^2 = 4$ и имеющей центр в его верхней вершине.

► Для данного эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$ верхняя вершина $A(0, 1)$, $a = 2$, $b = 1$. Поэтому

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

и фокусы находятся в точках $F_1(-\sqrt{3}, 0)$, $F_2(\sqrt{3}, 0)$. Радиус R искомой окружности вычисляем по формуле расстояния между двумя точками:

$$\begin{aligned} R = |AF_1| &= |AF_2| = \sqrt{(\mp\sqrt{3} - 0)^2 + (0 - 1)^2} = \\ &= \sqrt{3 + 1} = 2. \end{aligned}$$

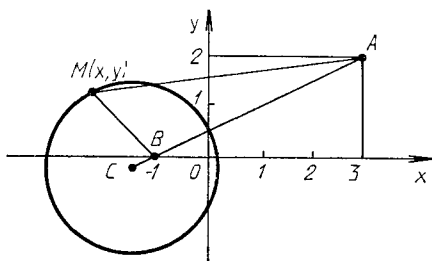
В соответствии с уравнением (4.2) записываем искомое уравнение окружности:

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 2^2 \text{ или } x^2 + (y - 1)^2 = 4. \quad \blacktriangleleft$$

3. Составить уравнение линии, каждая точка M которой отстоит от точки $A(3, 2)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $B(-1, 0)$.

► Пусть $M(x, y)$ — любая точка искомой линии (рис. 4.19). Тогда по условию задачи $|AM| = 3|BM|$. Так как

$$|AM| = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2}, \quad |BM| = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2},$$



Р и с. 4.19

то уравнение искомой линии

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 3\sqrt{(x+1)^2 + y^2}.$$

Преобразуем его, возведя обе части в квадрат. Имеем:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 &= 9x^2 + 18x + 9 + 9y^2, \\ 8x^2 + 24x + 8y^2 + 4y - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Выделив полные квадраты в последнем уравнении, придем к уравнению вида

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{45}{16},$$

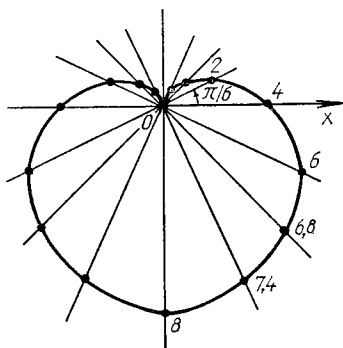
которое является уравнением окружности с центром в точке $C(-3/2, -1/4)$ и радиусом $R = 3\sqrt{5}/4$. ◀

4. Построить кардиоиду, заданную уравнением в полярных координатах $\rho = 4(1 - \sin \varphi)$.

► Составим таблицу, в которой приведены значения полярного угла φ_i ($i = \overline{1,16}$) и соответствующие им значения полярного радиуса ρ_i :

φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i	φ_i	ρ_i
0	4	$\pi/2$	0	π	4	$3\pi/2$	8
$\pi/6$	2	$2\pi/3$	$\approx 0,6$	$7\pi/6$	6	$5\pi/3$	$\approx 7,4$
$\pi/4$	$\approx 1,2$	$3\pi/4$	$\approx 1,2$	$5\pi/4$	$\approx 6,8$	$7\pi/4$	$\approx 6,8$
$\pi/3$	$\approx 0,6$	$5\pi/6$	2	$4\pi/3$	$\approx 7,4$	$11\pi/6$	6

Построив найденные точки $M_i(\rho_i, \varphi_i)$ в полярной системе координат (см. пример 1 из § 4.3) и соединив их плавной линией, получим достаточно точное представление о кардиоиде (рис. 4.20.). ◀



Р и с. 4.20

5. Построить кривую, заданную параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cos t, \\ y = 2 - 2 \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

► Выберем достаточное количество значений параметра t_i , вычислим соответствующие значения x_i , y_i и построим точки $M_i(x_i, y_i)$ в декартовых координатах. Соединим их плавной линией. Очевидно, что полученная кривая очень похожа на эллипс с полуосями $a = 3$, $b = 2$ и центром в точке $C(1, 2)$. Для строгого доказательства того, что данные параметрические уравнения определяют эллипс с указанными осями и центром, избавимся от параметра t :

$$\frac{x-1}{3} = \cos t, \quad \frac{y-2}{-2} = \sin t,$$

откуда $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$. ◀

ИДЗ-4.2

1. Построить поверхности и определить их вид (названия).

- 1.1. а) $4x^2 - y^2 - 16z^2 + 16 = 0$; б) $x^2 + 4z = 0$.
- 1.2. а) $3x^2 + y^2 + 9z^2 - 9 = 0$; б) $x^2 + 2y^2 - 2z = 0$.
- 1.3. а) $-5x^2 + 10y^2 - z^2 + 20 = 0$; б) $y^2 + 4z^2 = 5x^2$.
- 1.4. а) $4x^2 - 8y^2 + z^2 + 24 = 0$; б) $x^2 - y = -9z^2$.
- 1.5. а) $x^2 - 6y^2 + z^2 = 0$; б) $7x^2 - 3y^2 - z^2 = 21$.
- 1.6. а) $z = 8 - x^2 - 4y^2$; б) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 72$.
- 1.7. а) $4x^2 + 6y^2 - 24z^2 = 96$; б) $y^2 + 8z^2 = 20x^2$.
- 1.8. а) $4x^2 - 5y^2 - 5z^2 + 40 = 0$; б) $y = 5x^2 + 3z^2$.

- 1.9. а) $x^2 = 8(y^2 + z^2)$; б) $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 18$.
 1.10. а) $5z^2 + 2y^2 = 10x$; б) $4z^2 - 3y^2 - 5x^2 + 60 = 0$.
 1.11. а) $x^2 - 7y^2 - 14z^2 - 21 = 0$; б) $2y = x^2 + 4z^2$.
 1.12. а) $6x^2 - y^2 + 3z^2 - 12 = 0$; б) $8y^2 + 2z^2 = x$.
 1.13. а) $-16x^2 + y^2 + 4z^2 - 32 = 0$; б) $6x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$.
 1.14. а) $5x^2 - y^2 - 15z^2 + 15 = 0$; б) $x^2 + 3z = 0$.
 1.15. а) $6x^2 + y^2 + 6z^2 - 18 = 0$; б) $3x^2 + y^2 - 3z = 0$.
 1.16. а) $-7x^2 + 14y^2 - z^2 + 21 = 0$; б) $y^2 + 2z^2 = 6x^2$.
 1.17. а) $-3x^2 + 6y^2 - z^2 - 18 = 0$; б) $x^2 - 2y = -z^2$.
 1.18. а) $4x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 0$; б) $4x^2 - y^2 - 3z^2 = 12$.
 1.19. а) $z = 4 - x^2 - y^2$; б) $3x^2 + 12y^2 + 4z^2 = 48$.
 1.20. а) $4x^2 + 5y^2 - 10z^2 = 60$; б) $7y^2 + z^2 = 14x^2$.
 1.21. а) $9x^2 - 6y^2 - 6z^2 + 1 = 0$; б) $15y = 10x^2 + 6y^2$.
 1.22. а) $x^2 = 5(y^2 + z^2)$; б) $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 36$.
 1.23. а) $4x^2 + 3y^2 = 12x$; б) $3x^2 - 4y^2 - 2z^2 + 12 = 0$.
 1.24. а) $8x^2 - y^2 - 2z^2 - 32 = 0$; б) $y - 4z^2 = 3x^2$.
 1.25. а) $x^2 - 6y^2 + z^2 - 12 = 0$; б) $x - 3z^2 = 9y^2$.
 1.26. а) $2x^2 - 3y^2 - 5z^2 + 30 = 0$; б) $2x^2 + 3z = 0$.
 1.27. а) $7x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 42 = 0$; б) $2x^2 + 4y^2 - 5z = 0$.
 1.28. а) $-4x^2 + 12y^2 - 3z^2 + 24 = 0$; б) $2y^2 + 6z^2 = 3x$.
 1.29. а) $3x^2 - 9y^2 + z^2 + 27 = 0$; б) $z^2 - 2y = -4x^2$.
 1.30. а) $27x^2 - 63y^2 + 21z^2 = 0$; б) $3x^2 - 7y^2 - 2z^2 = 42$.

2. Записать уравнение и определить вид поверхности, полученной при вращении данной линии вокруг указанной оси координат, сделать рисунок.

- 2.1. а) $y^2 = 2z$, Oz ; б) $9y^2 + 4z^2 = 36$; Oy .
 2.2. а) $4x^2 - 3y^2 = 12$, Ox ; б) $x = 1$, $y = 2$, Oz .
 2.3. а) $x^2 = -3z$, Oz ; б) $3x^2 + 5z^2 = 15$, Ox .
 2.4. а) $3y^2 - 4z^2 = 12$, Oz ; б) $y = 4$, $z = 2$, Ox .
 2.5. а) $x^2 = 3y$, Oy ; б) $3x^2 + 4z^2 = 24$, Oz .
 2.6. а) $2x^2 - 6y^2 = 12$, Ox ; б) $y^2 = 4z$, Oz .
 2.7. а) $x^2 + 3z^2 = 9$, Oz ; б) $x = 4$, $z = 6$, Oy .
 2.8. а) $3x^2 - 5z^2 = 15$, Oz ; б) $z = -1$, $y = 3$, Ox .
 2.9. а) $y^2 = 3z$, Oz ; б) $2x^2 + 3z^2 = 6$, Ox .
 2.10. а) $y^2 - 5x^2 = 5$, Oy ; б) $y = 3$, $z = 1$, Ox .
 2.11. а) $x^2 = -4z$, Oz ; б) $y^2 + 4z^2 = 4$, Oy .
 2.12. а) $5x^2 - 6z^2 = 30$, Ox ; б) $x = 3$, $z = -2$, Oy .
 2.13. а) $z^2 = 2y$, Oy ; б) $2x^2 + 3z^2 = 6$, Oz .
 2.14. а) $y^2 = -4z$, Oz ; б) $3y^2 + z^2 = 6$, Oy .
 2.15. а) $7x^2 - 5y^2 = 35$, Ox ; б) $x = -1$, $y = -3$, Oz .
 2.16. а) $2x^2 = z$, Oz ; б) $x^2 + 4z^2 = 4$, Ox .
 2.17. а) $2y^2 - 5z = 10$, Oz ; б) $y = 2$, $z = 6$, Ox .
 2.18. а) $x^2 = -5y$, Oy ; б) $2x^2 + 3z = 6$, Oz .
 2.19. а) $x^2 - 9y^2 = 9$, Ox ; б) $3y^2 = z$, Oz .

- 2.20. а) $x^2 + 2z = 4$, Oz ; б) $x = 3$, $z = -1$, Oy .
 2.21. а) $15x^2 - 3y^2 = 1$, Ox ; б) $x = 3$, $y = 4$, Oz .
 2.22. а) $y^2 = 5z$, Oz ; б) $3x^2 + 7y^2 = 21$, Ox .
 2.23. а) $15y^2 - x^2 = 6$, Oy ; б) $y = 5$, $z = 2$, Oy .
 2.24. а) $5z = -x^2$, Oz ; б) $3y^2 + 18z^2 = 1$, Oy .
 2.25. а) $3x^2 - 8y^2 = 288$, Ox ; б) $x = 5$, $z = -3$, Oy .
 2.26. а) $2y^2 = 72$, Oz ; б) $6y^2 + 5z^2 = 30$, Oy .
 2.27. а) $5x^2 - 7y^2 = 35$, Ox ; б) $x = 2$, $y = -4$, Oz .
 2.28. а) $3x^2 = -2z$, Oz ; б) $8x^2 + 11z^2 = 88$, Ox .
 2.29. а) $5y^2 - 8z^2 = 40$, Oz ; б) $y = 3$, $z = 1$, Ox .
 2.30. а) $3x^2 = -4y$, Oz ; б) $4x^2 + 3z^2 = 12$, Oz .

3. Построить тело, ограниченное указанными поверхностями.

- 3.1. а) $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $x = 0$, $y = 0$;
 б) $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$, $z = x$.
 3.2. а) $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 0$, $y = 2x$, $y = 4x$, $x = 3$ ($z > 0$);
 б) $x^2 + y^2 = 4y$, $z = 0$, $y + z = 5$.
 3.3. а) $y^2 + 3z^2 = 6$, $3x^2 - 25y^2 = 75$, $z \geq 0$; б) $x = 4$,
 $y = 2$, $x + 2y + 3z = 12$, $x = 0$, $y = 0$, $z \geq 0$.
 3.4. а) $z = 5y$, $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$; б) $x + y + z = 5$,
 $3x + y = 5$, $2x + y = 5$, $y = 0$, $z = 0$.
 3.5. а) $y = 3x$, $y = 0$, $x = 2$, $z = xy$, $z = 0$; б) $8(x^2 +$
 $+ y^2) = z^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
 3.6. а) $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = x^2 + 5y^2$, $z = 0$; б) $x^2 +$
 $+ y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$.
 3.7. а) $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = \sqrt{xy}$, $z = 0$; б) $x^2 +$
 $+ y^2 + z^2 = 4$, $x^2 + y^2 = z^2$, $x \geq 0$, $z \geq 0$.
 3.8. а) $y = 2x$, $y = 0$, $x = 2$, $z = xy$, $z = 0$; б) $x^2 + y^2 =$
 $= z^2$, $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.
 3.9. а) $z = x^2 + 3y^2$, $z = 0$, $y = x$, $y = 0$, $x = 1$; б) $z =$
 $= 8(x^2 + y^2) + 3$, $z = 16x + 3$.
 3.10. а) $y = 4x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = \sqrt{xy}$, $z = 0$; б) $z =$
 $= 3\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 2 - x^2 - y^2$.
 3.11. а) $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = 3x^2 + 2y^2$, $z = 0$; б) $z =$
 $= 10(x^2 + y^2) + 1$, $z = 1 - 20y$.
 3.12. а) $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = \sqrt{xy}$, $z = 0$; б) $y =$
 $= 16\sqrt{2x}$, $y = \sqrt{2x}$, $z = 0$, $x + z = 2$.
 3.13. а) $y = x$, $y = 0$, $x = 2$, $z = 0$; б) $x + y = 2$, $x =$
 $= \sqrt{y}$, $z = 2x$, $z = 0$.
 3.14. а) $2z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 3$, $x = 0$, $y = 0$;
 б) $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 0$, $z = x$.

3.15. а) $x^2 + y^2 = 4z^2$, $z = 0$, $y = x$, $y = 8x$, $x = 2$, $z > 0$; б) $x^2 + y^2 = 8y$, $z = 0$, $y + z = 6$.

3.16. а) $y^2 + 4z^2 = 8$, $16x^2 - 49y^2 = 784$, $z \geq 0$; б) $x = 1$, $y = 3$, $x + 5y + 10z = 20$, $x = 0$, $y = 0$, $z \geq 0$.

3.17. а) $z = 3y^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$; б) $x + 2y + 3z = 6$, $2x = y$, $2x + 3y = 6$, $y = 0$, $z = 0$.

3.18. а) $y = 4x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = xy$, $z = 0$; б) $4(x^2 + y^2) = z^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

3.19. а) $y = 2x$, $y = 0$, $x = 2$, $z = 2x^2 + y^2$, $z = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$.

3.20. а) $y = 4x$, $y = 0$, $x = 4$, $z = \sqrt{xy}$, $z = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + z^2 = y^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

3.21. а) $y = 3x$, $y = 0$, $x = 3$, $z = xy$, $z = 0$; б) $4(x^2 + y^2) = z^2$, $4(x^2 + y^2) = 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

3.22. а) $z = 16x^2 + y^2$, $z = 0$, $y = 2x$, $y = 0$, $x = 1$; б) $z - 4 = 6(x^2 + y^2)$, $z = 4x + 1$.

3.23. а) $y = 3x$, $y = 0$, $x = 3$, $z = \sqrt{xy}$, $z = 0$; б) $z = 4\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 5 - x^2 - y^2$.

3.24. а) $y = 3x$, $y = 0$, $x = 2$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$; б) $z - 2 = 6(x^2 + y^2)$, $z = 1 - 4y$.

3.25. а) $y = 2x$, $y = 0$, $x = 4$, $z = \sqrt{xy}$, $z = 0$; б) $x + y = 2$, $y = \sqrt{x}$, $z = 12y$, $z = 0$, $x = 0$.

3.26. а) $z = 2x^2 + 3y^2$, $z = 0$, $x = 2$, $y = 1$, $x = 0$, $y = 0$; б) $x^2 + y^2 = 6x$, $z = 0$, $z = 2x$.

3.27. а) $4(x^2 + y^2) = z^2$, $z = 0$, $y = x$, $y = 4x$, $x = 2(z > 0)$; б) $x^2 + y^2 = 4y$, $z = 0$, $y + z = 6$.

3.28. а) $2y^2 + z^2 = 4$, $3x^2 - 8y^2 = 48$, $z \geq 0$; б) $x = 1$, $y = 3$, $x + 2y + 4z = 24$, $x = 0$, $y = 0$, $z \geq 0$.

3.29. а) $z = 3y^2$, $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$; б) $x + y + z = 8$, $x + 2y = 4$, $x + 4y = 4$, $y = 0$, $z = 0$.

3.30. а) $y = 5x$, $y = 0$, $x = 3$, $z = 0$; б) $4(x^2 + y^2) = z^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Решение типового варианта

1. Построить данные поверхности и определить их вид (название):

а) $-\frac{x^2}{6} + 4y^2 + \frac{1}{2}z^2 - 2 = 0$; б) $3x^2 + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4} = 0$.

► а) Приведем уравнение к каноническому виду

$$-\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{1/2} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Получили уравнение гиперболоида, расположенного так, как показано на рис. 4.21; полуоси его «горлового» эллипса $OB = \sqrt{2}/2$, $OC = 2$;

б) Приведем уравнение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{12} = 0.$$

Это уравнение конуса второго порядка, ориентированного указанным на рис. 4.22 образом. Его сечения плоскостями $z = \text{const}$ являются эллипсами. ◀

2. Записать уравнение поверхности, полученной при вращении:

1) параболы $z = -\frac{1}{2}y^2$: а) вокруг оси Oy ; б) вокруг оси Oz ;

2) эллипса $\frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{4} = 1$: а) вокруг оси Oz ; б) вокруг оси Oy .

► 1. В соответствии с общим правилом получения уравнения поверхности вращения (см. § 4.2) находим:

а) $\pm\sqrt{x^2 + z^2} = -\frac{1}{2}y^2$, $4x^2 - y^4 + 4z^2 = 0$

(алгебраическая поверхность четвертого порядка (рис. 4.23));

б) $z = -\frac{1}{2}(\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2$, $z = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

(параболоид вращения (рис. 4.24)).

2. Имеем:

а) $\frac{(\pm\sqrt{x^2 + y^2})^2}{64} + \frac{z^2}{4} = 1$, $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{4} = 1$.

Получили сплюснутый вдоль оси Oz эллипсоид вращения (сфероид), полуоси его главных сечений $OA = OB = 8$, $OC = 2$ (рис. 4.25);

б) $\frac{y^2}{64} + \frac{(\pm\sqrt{x^2 + z^2})^2}{4} = 1$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{4} = 1$

(вытянутый вдоль оси Oy эллипсоид вращения (рис. 4.26): $OA = OC = 2$, $OB = 8$). ◀

3. Построить тело, ограниченное данными поверхностями:

а) $y = x$, $x = 1$, $z = 0$, $z = xy$;

б) $x + y = 4$, $x = \sqrt{2y}$, $3x = 2z$, $z = 0$.

► а) Построение выполнено на рис. 4.27: OC — дуга

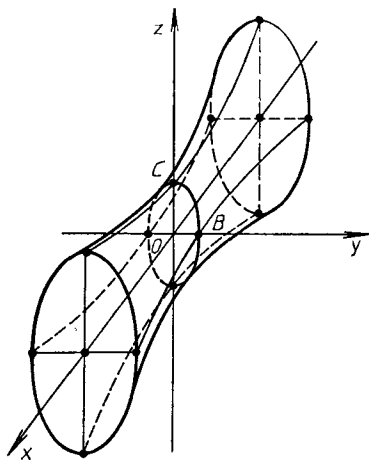


Рис. 4.21

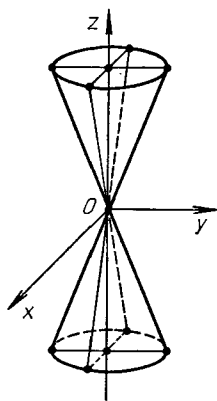


Рис. 4.22

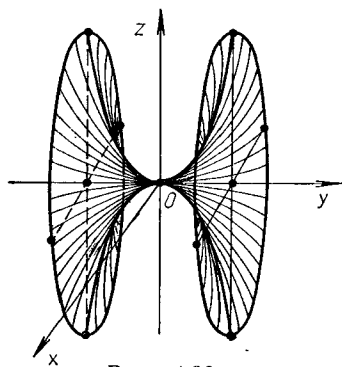


Рис. 4.23

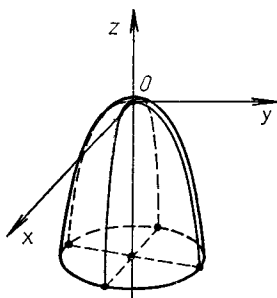


Рис. 4.24

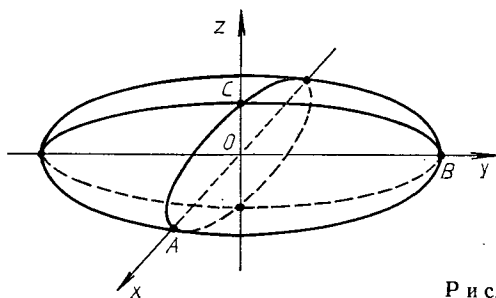


Рис. 4.25

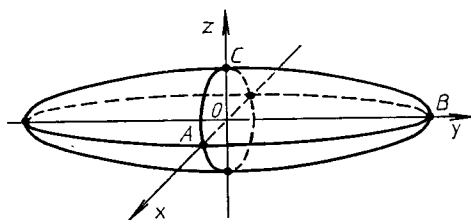


Рис. 4.26

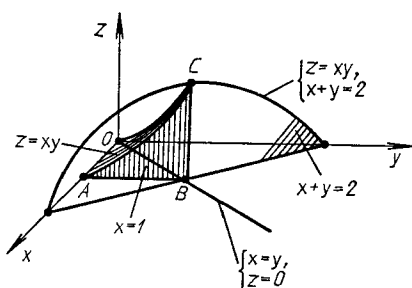


Рис. 4.27

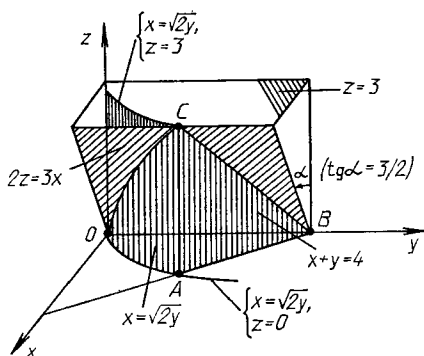


Рис. 4.28

параболы, являющейся пересечением гиперболического параболоида $z = xy$ с плоскостью $x = y$; \overline{AC} — пересечение поверхности $z = xy$ с плоскостью $x = 1$; $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$ — характерные точки тела;

б) Построение выполнено на рис. 4.28: OC — дуга параболы, являющейся пересечением параболического

цилиндра с плоскостью $2z = 3x$; $A(2, 2, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(2, 2, 3)$ — характерные точки тела. ◀

4.5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 4

1. Через точку $A(7/2, 7/4)$ провести хорду эллипса $x^2 + 4y^2 = 25$, делящуюся в этой точке пополам. (Ответ: $x + 2y - 7 = 0$.)

2. Доказать, что парабола обладает так называемым оптическим свойством: луч света, выйдя из фокуса и отразившись от параболы, пойдет по прямой, параллельной оси параболы.

3. Через точку $A(4, 4)$ провести хорду гиперболы $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$, делящуюся в этой точке пополам. (Ответ: $4x - 3y - 4 = 0$.)

4. Найти радиус наибольшей окружности, лежащей внутри параболы $y^2 = 2px$ и касающейся этой параболы в ее вершине. (Ответ: $R = p$.)

5. Составить уравнение гиперболы с асимптотами $\sqrt{3}x \pm y = 0$, касающейся прямой $2x - y - 3 = 0$. (Ответ: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$.)

6. Составить уравнение касательной к параболе $y^2 = -8x$, отрезок которой между точкой касания и директрисой делится осью Oy пополам. (Ответ: $x + y - 2 = 0$ или $x - y - 2 = 0$.)

7. Доказать, что все треугольники, образованные асимптотами гиперболы и произвольной касательной к ней, имеют одну и ту же площадь; выразить эту площадь через полуоси гиперболы. (Ответ: ab .)

8. Составить уравнения касательных к параболе $y^2 = 16x$, проходящих через точку $A(1, 5)$, и вычислить площадь треугольника, образованного касательными и директрисой параболы. (Ответ: $x - y + 4 = 0$, $4x - y + 1 = 0$, $S = 37,5$.)

9. Источник короткоинтервального звука находится в неизвестном пункте M . Звук достиг трех наблюдательных пунктов одновременно: пункта A — на t_1 с позже, а пункта C — на t_2 с позже, чем пункта B . Определить местонахождение пункта M , приняв скорость звука равной 330 м/с. (Ответ: M находится на пересечении правой

ветви гиперболы $|AM| - |BM| = 330t_1$ м с фокусами A и B и левой ветви гиперболы $|BM| - |CM| = -330t_2$ м с фокусами B и C .)

10. Цепь подвесного моста имеет форму параболы $y = px^2$. Длина пролета моста — 50 м, а прогиб цепи — 5 м. Определить величину угла α прогиба в крайней точке моста. (Ответ: $\operatorname{tg} \alpha = 0,4$, $\alpha \approx 21^\circ 50'$.)

11. Зеркальная поверхность прожектора образована вращением параболы вокруг ее оси симметрии. Диаметр зеркала 80 см, а глубина его 20 см. На каком расстоянии от вершины параболы нужно поместить источник света, если для отражения лучей параллельным пучком он должен быть в фокусе параболы? (Ответ: 40 см.)

12. Даны точка O и прямая l , находящаяся от точки O на расстоянии $|OA| = a$. Вокруг точки O вращается луч, пересекающий прямую l в переменной точке P . На этом луче от точки O откладывается отрезок OM так, что $|OP| \cdot |OM| = b^2$. Найти уравнение линии, которая описывается точкой M при вращении луча. Уравнение записать в полярных и декартовых координатах. (Ответ: окруж-

ность: $\rho = \frac{b^2}{a} \cos \varphi$, $x^2 + y^2 = \frac{b^2}{a} x$.)

13. Записать параметрические уравнения линии пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и круглого цилиндра $x^2 + y^2 - 2x = 0$, выбирая в качестве параметра угол φ , образованный проекцией радиуса-вектора \vec{OM} произвольной точки M линии на плоскость Oxy с положительным направлением оси Ox . (Ответ: $x = R \cos^2 \varphi$, $y = R \sin \varphi \cos \varphi$, $z = R \sin \varphi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.)

14. Найти уравнение проекции линии пересечения поверхностей $x^2 + 2y^2 = 2z$ и $x + 2y + z = 1$ на плоскость Oxy . (Ответ: $x^2 + 2y^2 + 2x + 4y - 2 = 0$.)

15. Найти центр сечения гиперboloида $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = -4$ плоскостью $x + y + 2z = 2$. (Ответ: $(4, 2, -2)$.)

16. Найти уравнение плоскости, пересекающей эллипсоид $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9$ по эллипсу, центр которого находится в точке $C(3, 2, 1)$. (Ответ: $3x + 4y + 4z - 21 = 0$.)

17. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $M(1, 1, 1)$ и $N(2, 0, 2)$ и пересекающей параболоид $x^2 - y^2 = 2z$ по паре прямых. (Ответ: $3x + y - 2z - 2 = 0$.)

18. Найти уравнение эллипсоида, содержащего точку $M(3, 1, 1)$ и окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - z = 0$, пло-

скости симметрии которого совпадают с плоскостями координат. (Ответ: $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 36$.)

19. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z + 24 = 0$, $2x + 2y + z + 1 = 0$. (Ответ: $(10/3, 14/3, 5/3)$, $R = 3$.)

20. Доказать, что линия пересечения параболоида $x^2 + 2y^2 = 4z + 10$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ состоит из двух окружностей. Найти точки пересечения этих окружностей и их радиусы. (Ответ: $M_1(\sqrt{2}, 0, -2)$, $M_2(-\sqrt{2}, 0, -2)$, $R = 2$.)

5. ФУНКЦИИ. ПРЕДЕЛЫ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

5.1. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Совокупность рациональных \mathbf{Q} и иррациональных чисел образует множество действительных (вещественных) чисел \mathbf{R} . Между множеством точек прямой и множеством \mathbf{R} всегда можно установить взаимно однозначное соответствие. Если это соответствие установлено, то прямую называют *числовой осью*. Совокупность всех чисел x , удовлетворяющих условию $a < x < b$ ($a \leq x \leq b$), называется *интервалом* (отрезком) и обозначается $(a; b)$ ($[a; b]$).

Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называют неотрицательное число $|a|$, определяемое условиями: $|a| = a$, если $a \geq 0$, и $|a| = -a$, если $a < 0$. Для любых действительных чисел a и b верно неравенство $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Если каждому элементу $x \in D$ по определенному правилу f поставлен в соответствие единственный элемент y , то говорят, что задана функция $y = f(x)$, где x называется *независимой переменной* или *аргументом*. Множество D называется *областью определения функции*, а множество значений, принимаемых функцией y , называется *областью ее значений (изменения)* и обозначается буквой E . В дальнейшем будем считать множества D и E числовыми, т. е. будем рассматривать числовые функции (если не оговорено противное). В качестве D и E могут быть взяты отрезок $[a; b]$, интервал $(a; b)$, полуинтервал $(a; b]$ или $[a; b)$, отдельные точки числовой оси, а также вся числовая ось $(-\infty; +\infty)$.

Основными способами задания функций являются: табличный, графический, аналитический. При аналитической записи функции $y = f(x)$ часто не указываются области D и E , но они естественным образом определяются из свойств функции $f(x)$.

Пример. Найти области определения и значений функции $y = \lg(4 - 3x - x^2)$.

► Логарифмическая функция определена, если $4 - 3x - x^2 > 0$. Корни квадратного трехчлена: $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. Записанное выше неравенство равносильно неравенству $-(x + 4)(x - 1) > 0$, что возможно при $x > -4$ и $x < 1$. Область D определения данной функции есть интервал $(-4; 1)$. Так как в D $0 < 4 - 3x - x^2 \leq 7/4$, то интервал $(-\infty; \lg(7/4))$ — область значений функции E . ◀

Если функция $y = f(x)$ осуществляет взаимно однозначное отображение области D на область E , то можно однозначно выразить x через y : $x = g(y)$. Последняя функция называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$. Для функции $x = g(y)$ E является областью определения, а D — областью значений. Так как $g(f(x)) \equiv x$ и $f(g(y)) \equiv y$, то функции $y = f(x)$ и $x = g(y)$ — взаимно обратные. Обратную функцию $x = g(y)$ обычно переписывают в стандартном виде: $y = g(x)$, поменяв x

и y местами. Взаимно обратными являются пары функций: $y = x^3$ и $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$, $y = \sin x$ и $y = \arcsin x$, для которых области определения соответственно следующие: $x \in (-\infty; +\infty)$ и $x \in (-\infty; +\infty)$, $x \in (-\infty; +\infty)$ и $x \in (0; +\infty)$, $x \in (-\infty; +\infty)$ и $x \in [-1; +1]$.

Если функция $u = \varphi(x)$ определена на области D , G — ее область значений, функция $y = f(u)$ определена на области G , то функция $y = f(\varphi(x)) = F(x)$ называется *сложной функцией*, составленной из функций f и φ , или функцией f от функции φ . Функцию $y = f(\varphi(x))$ называют *композицией двух функций* $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. Сложная функция может быть композицией большего числа функций: трех, четырех и т. д. Например, функция $y = \cos(x^2 + 1)$ — композиция двух функций $y = \cos u$ и $u = x^2 + 1$; функция $y = \lg(\sin 2^x)$ — композиция трех функций $y = \lg u$, $u = \sin v$, $v = 2^x$, а функция $y = \lg(\sin 2^x)$ — композиция четырех функций $y = \lg u$, $u = \sin v$, $v = 2^w$, $w = x^3$. Переменные величины u , v , w называются *промежуточными аргументами*.

Функции вида $y = f(x)$ называются *явными*. Уравнение вида $F(x, y) = 0$ также задает, вообще говоря, функциональную зависимость между x и y . В этом случае по определению y является *неявной функцией* x . Например, уравнение $y^3 + x^3 = 8$ определяет y как неявную функцию от x .

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $M(x, y)$ плоскости Oxy , координаты которых удовлетворяют функциональной зависимости $y = f(x)$. Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ симметричны относительно биссектрисы $x = y$.

К основным элементарным функциям относятся пять классов функций: степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические и обратные тригонометрические.

А3-5.1

1. Найти области определения следующих функций:

а) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$; б) $y = \arccos \frac{2x}{1+x}$;

в) $y = \sqrt{25 - x^2} + \lg \sin x$.

(Ответ: а) $(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$; б) $[-1/3; 1]$; в) $[-5; -\pi) \cup (0; \pi)$.)

2. Представить сложные функции в виде композиции функций, являющихся основными элементарными функциями:

а) $y = 2^{\sin \sqrt[3]{x}}$; б) $y = \sqrt[3]{\lg \sin x^3}$;

в) $y = \operatorname{tg} \sqrt[5]{\lg x}$; г) $y = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{2^x}$.

3. Построить графики функций:

а) $y = (2x + 3)/(x - 1)$; б) $y = |3x + 4 - x^2|$;

в) $y = -2 \sin(2x + 2)$; г) $y = x \sin x$.

Самостоятельная работа

1. 1. Найти область определения функции $y = \lg(2^{3x} - 4)$. (Ответ: $x > 2/3$.)

2. Для функции

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

найти обратную. Построить графики данной и найденной функций.

2. 1. Найти область определения функции $y = \lg(-x^2 - 5x + 6)$. (Ответ: $x \in (-6; 1)$.)

2. Построить график функции

$$y = \begin{cases} 1 + x, & \text{если } x < 0, \\ 2 \sin x, & \text{если } 0 \leq x < \pi, \\ x - \pi, & \text{если } x \geq \pi. \end{cases}$$

3. 1. Найти область определения функции $y = 1/\sqrt{x^2 + x}$. (Ответ: $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.)

2. Для функции

$$y = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 1, \\ x^2 - 2, & \text{если } x \geq 1, \end{cases}$$

найти обратную. Построить графики данной и найденной функций.

5.2. ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ. РАСКРЫТИЕ ПРОСТЕЙШИХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Число A называется *пределом числовой последовательности* $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $n > N$, где N — целое, выполняется неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$. Если A — предел последовательности $\{x_n\}$, то это записывается так: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае — *расходящейся*.

Пример 1. Дана последовательность $\{x_n\} = \left\{ \frac{2n+3}{n+1} \right\}$. Доказать, что ее предел $A = 2$.

► Попробуем доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех $n > N$ будет выполняться неравенство

$$|x_n - A| = \left| \frac{2n+3}{n+1} - 2 \right| = \left| \frac{2n+3-2n-2}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Решив последнее неравенство, получим $n > 1/\varepsilon - 1$, следовательно, $N = [1/\varepsilon - 1] + 1$, где $[\alpha]$ — целая часть числа α . Таким образом, существует N , такое, что для любого $n > N$ выполняется $|x_n - 2| < \varepsilon$. ◀

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда число A называется *пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$* (в точке $x = x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ ($\delta = \delta(\varepsilon)$), такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Если A — предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то пишут: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

В самой точке x_0 функция $f(x)$ может и не существовать ($f(x_0)$ не определена). Аналогично запись $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = A$ обозначает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) > 0$, такое, что при $|x| > N$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Если существует предел вида $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$, который обозначают также $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ или $f(x_0 - 0)$, то он называется *пределом слева функции $f(x)$ в точке x_0* . Аналогично если существует предел вида $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ (в другой записи $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ или $f(x_0 + 0)$), то он называется *пределом справа*

функции $f(x)$ в точке x_0 . Пределы слева и справа называются *односторонними*. Для существования предела функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы оба односторонних предела в точке x_0 существовали и были равны, т. е. $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Справедливы следующие основные теоремы о пределах.

Теорема 1. Пусть существуют $\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x)$ ($i = \overline{1, n}$). Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{i=1}^n f_i(x) = \sum_{i=1}^n \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \prod_{i=1}^n f_i(x) = \prod_{i=1}^n \lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x).$$

Теорема 2. Пусть существуют $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) / \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x).$$

(Все записи верны и при $x_0 = \pm \infty$.)

Если условия этих теорем не выполняются, то могут возникнуть неопределенности вида $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ и др., которые в простейших случаях раскрываются с помощью алгебраических преобразований.

Пример 2. Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right)$.

► Имеем неопределенность вида $\infty - \infty$. Чтобы раскрыть ее, приведем выражение в скобках к общему знаменателю. Получим $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{x - 2} \cdot \frac{x - 2}{x^2 - 4}$, т. е. неопределенность вида $\frac{0}{0}$, которая легко раскрывается, если под знаком предела сократить дробь на общий множитель $x - 2 \neq 0$. В итоге исходный предел сводится к $\lim_{x \rightarrow 2} \left(-\frac{1}{x + 2} \right) = -\frac{1}{4}$. ◀

Пример 3. Найти $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x^3 - x + 5}{x^4 + x^2 - 1}$.

► Имеем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Чтобы раскрыть ее, разделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на x^3 . Получим

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}}$$

Знаменатель полученной дроби при $x \rightarrow \pm \infty$ не равен нулю, следовательно, можно применить теорему о пределе частного. Также применимы и другие теоремы о пределах, что в итоге приводит к равенству

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2x^3 - x + 5}{x^3 + x^2 - 1} = \frac{\lim 2 - \lim \frac{1}{x^2} + \lim \frac{5}{x^3}}{\lim 1 + \lim \frac{1}{x} - \lim \frac{1}{x^3}} = 2. \blacktriangleleft$$

А3-5.2

1. Доказать, что последовательность $\{x_n\} = \left\{ \frac{3n+5}{n-1} \right\}$ имеет предел $A = 3$.

Найти пределы указанных функций.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 3n - 5}{1 - n^2}$. (Ответ: -3 .)

3. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{2 + 4x^2 + 3x^3}{x^3 - 7x - 10}$. (Ответ: 3 .)

4. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{7x^2 + 10x + 20}{x^3 - 10x^2 - 1}$. (Ответ: 0 .)

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 3}{x^2 - 3}$. (Ответ: -1 .)

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{8 - x^3}$. (Ответ: $1/4$.)

7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 7x + 6}$. (Ответ: $3/5$.)

8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{\sqrt{x+2} - 2}$. (Ответ: $2/3$.)

9. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x(\sqrt{x^2 + 4} - x))$. (Ответ: 2 .)

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$. (Ответ: -1 .)

Самостоятельная работа

Вычислить пределы указанных функций.

1. а) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{x^2 - 9}$. (Ответ:

а) 6 ; б) $1/148$.)

2. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x + 6}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{\sqrt{x-1} - 2}$. (Ответ: а) 3; б) 40.)
3. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 4x + 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x(\sqrt{x^2 + 5} - \sqrt{x^2 + 1}))$.
(Ответ: а) -1; б) 2.)

5.3. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ

Широко используются следующие два замечательных предела:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e \approx 2,71828.$$

Пример 1. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x}$.

► Так как $x \neq 0$ под знаком предела, то

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 7x}{7x} \cdot 7x}{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7x}{3x}\right) \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 7x}{7x}}{\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{7}{3}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 2. Найти $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}$.

► Имеем:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1+2}{2x-1}\right)^{3x+1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1}. \end{aligned}$$

Положим $\frac{2}{2x-1} = \frac{1}{y}$. Тогда $x = y - 1/2$ и при $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2x-1}\right)^{3x+1} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{3y-1/2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right)^3 \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{-1/2} = e^3. \end{aligned}$$

А3-5.3*

Найти пределы указанных функций.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}$. (Ответ: 3/2.)

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \sin 3x}$. (Ответ: 6.)

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(2(x-1))}{x^2 - 7x + 6}$. (Ответ: -2/5.)

4. $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x+3}{2x-1} \right)^x$. (Ответ: 0 или ∞ .)

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x-1} \right)^{4x-1}$. (Ответ: e^4 .)

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} ((2x+1)(\ln(3x+1) - \ln(3x-2)))$. (Ответ: 2.)

5.4. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ (т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$), то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой функцией при $x \rightarrow x_0$* .

Для сравнения двух бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$ находят предел их отношения:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C. \quad (5.1)$$

Если $C \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми величинами одного и того же порядка*; если $C = 0$, то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $\beta(x)$* , а $\beta(x)$ — *бесконечно малой более низкого порядка по сравнению с $\alpha(x)$* .

Если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = C \quad (0 < |C| < \infty),$$

то $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой порядка k по сравнению с $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$* .

Если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$ называются *эквивалентными (равносильными) величинами: $\alpha(x) \sim \beta(x)$* . Например, при $x \rightarrow 0$ $\sin ax \sim ax$, $\operatorname{tg} x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^{ax} - 1 \sim ax$.

Легко доказать, что предел отношения бесконечно малых функций

* В данном А3 вместо самостоятельной работы предлагается контрольная, рассчитанная на 1 час (см. прил., с. 255).

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$ равен пределу отношения эквивалентных им бесконечно малых функций $\alpha^*(x)$ и $\beta^*(x)$ при $x \rightarrow x_0$, т. е. верны предельные равенства:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha^*(x)}{\beta^*(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta^*(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha^*(x)}{\beta(x)}.$$

Пример 1. Найти предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+x)}$.

► Поскольку $\sin 5x \sim 5x$, $\ln(1+x) \sim x$ при $x \rightarrow 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x} = 5. \blacktriangleleft$$

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной при $x = x_0$ (в точке x_0)*, если: 1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности; 2) существует конечный предел функции $f(x)$ в точке x_0 ; 3) этот предел равен значению функции в точке x_0 , т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (5.2)$$

Если положить $x = x_0 + \Delta x$, то условие непрерывности (5.2) будет равносильно условию

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0,$$

т. е. функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f(x_0)$.

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области, называется *непрерывной в этой области*.

Пример 2. Доказать непрерывность функции $y = \sin 5x$ для любого $x \in \mathbf{R}$.

► Для любого приращения Δx независимой переменной приращение функции

$$\Delta y = \sin 5(x + \Delta x) - \sin 5x = 2 \cos \left(5x + \frac{5}{2} \Delta x \right) \cdot \sin \frac{5}{2} \Delta x.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(5x + \frac{5}{2} \Delta x \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{5}{2} \Delta x = 0,$$

так как $\cos 5x$ — ограниченная функция для любого $x \in \mathbf{R}$. Следовательно, функция $y = \sin 5x$ непрерывна на всей числовой прямой. ◀

Точка x_0 , в которой нарушено хотя бы одно из трех условий непрерывности функции, называется *точкой разрыва функции*. Если в точке x_0 существуют конечные пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, такие, что $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 называется *точкой разрыва первого рода*. Если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ не существует или равен бесконечности, то точку x_0 называют *точкой разрыва второго рода*. Если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$ и функция $f(x)$ не определена в точке x_0 , то точку x_0 называют *устранимой точкой разрыва функции*. Например, для функций $y = x \cos x$ и $y = \frac{\sin x}{x}$ точка $x = 0$ является *устранимой точкой разрыва*.

А3-5.4

1. Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 3(x-2)}{x^2 - 3x + 2}$. (Ответ: 3.)

2. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 10x}$. (Ответ: 1/2.)

3. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+7x)}{\sin 7x}$. (Ответ: 1.)

4. Определить порядок бесконечно малой функции $y = 7x^8/(x^4 + 1)$ относительно бесконечно малой x при $x \rightarrow 0$.

5. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - 9)/(x - 3), & \text{если } x \neq 3, \\ A, & \text{если } x = 3. \end{cases}$$

При каких значениях A функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x = 3$? Построить график функции.

6. Установить область непрерывности функции $y = (3x + 3)/(2x + 4)$ и найти ее точки разрыва.

7. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x < 0, \\ \sin x, & \text{если } 0 \leq x < \pi/2, \\ y = x - \pi/2 + 1, & \text{если } x \geq \pi/2. \end{cases}$$

Найти точки разрыва функции и построить ее график.

8. Исследовать на непрерывность функцию $y = 3^{1/(x+1)} + 1$ в точках $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$.

Самостоятельная работа

1. 1. Найти $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin 3(x+1)}{x^2 + 4x - 5}$. (Ответ: $-3/4$.)

2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = (2x + 4)/(3x + 9)$ в точках $x_1 = -1$, $x_2 = -3$. Сделать схематический чертеж.

2. 1. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 7x} - 1}{x^2 + 3x}$. (Ответ: $7/3$.)

2. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x < 0, \\ \cos x, & \text{если } 0 \leq x < \pi/2, \\ 1 - x, & \text{если } x \geq \pi/2. \end{cases}$$

Исследовать ее на непрерывность. Сделать схематический чертеж.

3. 1. Найти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x^2 - 3x + 2)}{x^2 - 4}$. (Ответ: 1/4.)

2. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = (3x - 2)/(x + 2)$ в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = -2$. Сделать схематический чертеж.

5.5. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 5

ИДЗ-5.1

Найти указанные пределы.

1

1.1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$.

1.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}$.

1.3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27}$.

1.4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}$.

1.5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 4}{x^2 - 5x + 6}$.

1.6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 + x - x^2}{x^3 - 27}$.

1.7. $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1}$.

1.8. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3}$.

1.9. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2}$.

1.10. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$.

1.11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$.

1.12. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1}$.

1.13. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}$.

1.14. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 2x - 3}$.

1.15. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3}$.

1.16. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 8x + 4}$.

1.17. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2}$.

1.18. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{3x^2 + 2x - 2}$.

1.19. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 3x + 1}$.

1.20. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 12}$.

1.21. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{x^2 + 3x - 10}$.

1.22. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 - 2x + 1}$.

1.23. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x^2 + 11x - 2}{3x^2 - x - 10}$.

1.24. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 - 9x - 35}$.

1.25. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 6x - 45}{2x^2 - 3x - 35}$.

1.26. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 3x + 15}{x^2 - 6x - 27}$.

1.27. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 + 11x + 5}$.

1.28. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x^2 + 15x - 8}{3x^2 + 25x + 8}$.

$$1.29. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 - 3x - 4}.$$

$$1.30. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 10x + 3}.$$

2

$$2.1. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{3x^2 + 5x - 12}.$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 10}{x^3 - 1}.$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}.$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 8}.$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^2 + x + 1}{x^4 + 1}.$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^4 - 1}.$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 3}{5x^2 + 3x - 3}.$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 4x + 4}.$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}.$$

$$2.10. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^3 + 64}.$$

$$2.11. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{4x^2 + 19x - 5}{2x^2 + 11x + 5}.$$

$$2.12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x - 2}.$$

$$2.13. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 7x + 5}.$$

$$2.14. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 9x + 10}.$$

$$2.15. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{9x^2 + 17x - 2}{x^2 + 2x}.$$

$$2.16. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}.$$

$$2.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + 5x}{3x^2 + 7x}.$$

$$2.18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 - 5x^2 + 1}{x^2 - 1}.$$

$$2.19. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 5x - 1}{x^2 - 5x + 6}.$$

$$2.20. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - x - 30}{x^3 + 125}.$$

$$2.21. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^3 - 64}.$$

$$2.22. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3 - 1}{x^2 - 1/4}.$$

$$2.23. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^2 - 4x}.$$

$$2.24. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 11x + 10}{x^2 - 5x + 14}.$$

$$2.25. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 + x - 10}.$$

$$2.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{4x^2 - 5x + 1}.$$

$$2.27. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 20x + 12}.$$

$$2.28. \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 2x - 24}{2x^3 + 15x + 18}.$$

$$2.29. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 11x + 18}.$$

$$2.30. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{7x^2 - 27x - 4}.$$

3

$$3.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}.$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5}.$$

$$3.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^3 + 1}.$$

$$3.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 5}.$$

- 3.5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 28x}{5x^3 + 3x^2 + x - 1}$.
- 3.7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x - 2}$.
- 3.9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$.
- 3.11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 7}{2x^2 - x + 10}$.
- 3.13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 9}{2x^2 - x + 4}$.
- 3.15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 2}{3x^3 - x - 4}$.
- 3.17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 6x^2 + 2}{x^4 + 4x - 3}$.
- 3.19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 + 3}{2x^4 + 1}$.
- 3.21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 4x}{x^3 - 3x + 2}$.
- 3.23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3}$.
- 3.25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}$.
- 3.27. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 - 3x^5}{x^5 + 6x + 8}$.
- 3.29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 + 2}$.
- 3.6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3}$.
- 3.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x + 3}{5x^2 - 3x + 4}$.
- 3.10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 10}{7x^3 + 2x + 1}$.
- 3.12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{x^4 - x^3 + 2x}$.
- 3.14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 7}{3x^2 + x + 1}$.
- 3.16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{18x^2 + 5x}{8 - 3x - 9x^2}$.
- 3.18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 4x - 5}{4x^2 - 3x + 2}$.
- 3.20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{6x^2 + 5x + 1}$.
- 3.22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4x - x^4}{x + 3x^2 + 2x^4}$.
- 3.24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 14x^2}{1 + 2x + 7x^2}$.
- 3.26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 - 7}{3x^4 + 3x + 5}$.
- 3.28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^3}$.
- 3.30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5}$.

4

- 4.1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 2x + 4}{2x^4 + 3x^2 + 1}$.
- 4.3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 7x - 4}{x^5 + 2x - 1}$.
- 4.5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 1}{3x^4 + 2x + 5}$.
- 4.7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^6 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 4x - 5}$.
- 4.9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 + 5x + 9}{1 + 4x - x^3}$.
- 4.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 5}{2x^2 + x + 7}$.
- 4.4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - x^6}{x^2 - 2x + 5}$.
- 4.6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 7x^2 + 4}{x^4 + 5x - 1}$.
- 4.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 5x^2 - 4x}{3x^2 + 11x - 7}$.
- 4.10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - 6}{2x^2 + 3x + 1}$.

- 4.11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x + 7}{3x^4 - 2x^2 + x}$.
- 4.13. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^3 - 3x^2 + 7}{2x^4 + 3x^2 + 1}$.
- 4.15. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{3x^2 - 4x + 1}$.
- 4.17. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x^3 + 3x}{2x^2 - 2x + 1}$.
- 4.19. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3 + 5x^2 - 3}{2x^2 - x + 7}$.
- 4.21. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^5 - 4x^3 + 3}{2x^3 + x - 7}$.
- 4.23. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 2x^3 + 3}{2x^2 + 3x - 7}$.
- 4.25. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - 8}{8x^3 - 4x + 5}$.
- 4.27. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 - 2x + 4}{2x^2 + x - 5}$.
- 4.29. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 10x - 11}{3x^4 - 2x + 5}$.
- 4.12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - 7x}{2x^2 + 7x - 3}$.
- 4.14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{1 + 2x - x^4}$.
- 4.16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 2}{4x^3 + 2x - 1}$.
- 4.18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 3x + 5}{4x^3 - 2x^2 + 1}$.
- 4.20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 7}{x^4 - 2x^3 + 1}$.
- 4.22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 7x + 1}{x^3 + 4x^2 - 3}$.
- 4.24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 + x^2 - 7}{2x^2 - 5x + 3}$.
- 4.26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 4}{3x^2 - 4x + 1}$.
- 4.28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 5x^2 - 3x}{3x^2 + x - 10}$.
- 4.30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 3x - 4}{2x^2 - 5x + 1}$.

5

- 5.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 5}{7x^3 - 2x^2 + 1}$.
- 5.3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 3x + 4}{3x^2 - 2x + 1}$.
- 5.5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 - x}$.
- 5.7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^4 + 3x^2 - 9}$.
- 5.9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + 7x + 1}$.
- 5.11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 6x^4 - x^3}{2x^2 + 6x + 1}$.
- 5.13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7 - 3x^4}{2x^3 + 3x^2 - 5}$.
- 5.15. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 7}{2 - 3x + 4x^2}$.
- 5.17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x - 7}{3x^4 + 2x^3 + 1}$.
- 5.2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^4 + 2x - 4}$.
- 5.4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 7}{3x^4 - 5x^2 + 10}$.
- 5.6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x + 1}{3x^2 + 2x - 5}$.
- 5.8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 4x + 2}{4x^3 + 2x - 5}$.
- 5.10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 7x + 5}{4x^5 - 3x^3 + 2}$.
- 5.12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 3x - 2x^2}{3x^4 + 5x}$.
- 5.14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 + 7x^3 - 3}{3x^2 - 5x + 1}$.
- 5.16. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{7x + 5}$.
- 5.18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 3x^2}{1 + 2x + 3x^2}$.

$$5.19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 3}{x^3 - 4x^2 - x}.$$

$$5.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^4 - 2x^2 + x}.$$

$$5.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{x^3 - 5x^2 + 4x}.$$

$$5.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 10x + 7}{2x^3 - 3x}.$$

$$5.27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 13}{x^7 - 3x^5 - 4x}.$$

$$5.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 81}{3x^2 + 4x + 2}.$$

$$5.20. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 5x}{2x^2 - 3x - 7}.$$

$$5.22. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - x^3}{4x^2 + 3x - 6}.$$

$$5.24. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x - 3x^2}{x^3 - 16}.$$

$$5.26. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^5 + 4x^3}.$$

$$5.28. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 2x^2 + 5}.$$

$$5.30. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x + 4}{3x^3 - 5x + 1}.$$

6

$$6.1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}.$$

$$6.2. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8}.$$

$$6.3. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21}.$$

$$6.4. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6}.$$

$$6.5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1}.$$

$$6.6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}.$$

$$6.7. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}.$$

$$6.8. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}.$$

$$6.9. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}.$$

$$6.10. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15}.$$

$$6.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} - 1}.$$

$$6.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{7+x}}{\sqrt{7x}}.$$

$$6.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}.$$

$$6.14. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}.$$

$$6.15. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{\sqrt{8-x} - 3}.$$

$$6.16. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}.$$

$$6.17. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3}.$$

$$6.18. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 - 9}.$$

$$6.19. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 + 2x - 15}.$$

$$6.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2+4}}{3x^2}.$$

$$6.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}.$$

$$6.23. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}.$$

$$6.25. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-27}{\sqrt{3x-x}}.$$

$$6.27. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}.$$

$$6.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}.$$

$$6.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$$

$$6.24. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}.$$

$$6.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}.$$

$$6.28. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-2}{\sqrt{8+x}-3}.$$

$$6.30. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$$

7

$$7.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}.$$

$$7.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$$

$$7.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}.$$

$$7.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}.$$

$$7.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}.$$

$$7.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}.$$

$$7.13. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}.$$

$$7.15. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}.$$

$$7.17. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}.$$

$$7.19. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$$

$$7.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-3x}{5-3x}\right)^{x'}.$$

$$7.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}.$$

$$7.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$$

$$7.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^{2-3x}.$$

$$7.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{-5x}.$$

$$7.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3^x}{x-1}\right)^{x-4}.$$

$$7.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x}\right)^{2x+1}.$$

$$7.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}.$$

$$7.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-3}\right)^{x-5}.$$

$$7.16. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4}\right)^{3x-1}.$$

$$7.18. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x+4}.$$

$$7.20. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{3-2x}.$$

$$7.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{3x}.$$

$$7.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}.$$

7.25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{-x}$.

7.27. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x}{3+2x} \right)^{-x}$.

7.29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{3-2x}$.

7.26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4}{3x+5} \right)^{x+1}$.

7.28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x+2} \right)^{x-2}$.

7.30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4-2x}{1-2x} \right)^{x+1}$.

8

8.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{5x+7} \right)^{x+1}$.

8.3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^{3x}$.

8.5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+8}{x-2} \right)^{x+4}$.

8.7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^{4x}$.

8.9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+3}{2x-4} \right)^{x+2}$.

8.11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-3}{x+4} \right)^{x+3}$.

8.13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-5}{3x+4} \right)^{2x}$.

8.15. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-2}{3x+1} \right)^{5x}$.

8.17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{3x+10} \right)^{3x}$.

8.19. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+3}{3x-1} \right)^{2x}$.

8.21. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x+7}{x+4} \right)^{4x}$.

8.23. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x-7}{x+6} \right)^{2x}$.

8.25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-2x}{3-x} \right)^{-x}$.

8.27. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-1}{2x+5} \right)^{3x}$.

8.29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5+x}{9x-4} \right)^{2x}$.

8.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x$.

8.4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-1}{4x+1} \right)^{3x-1}$.

8.6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{3x-1} \right)^{2x+1}$.

8.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^{5x}$.

8.10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{3x-1} \right)^{x-1}$.

8.12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-3}{7x+4} \right)^x$.

8.14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{4x-5} \right)^{2x}$.

8.16. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-4}{x+6} \right)^{x-1}$.

8.18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x-3}{x+4} \right)^{6x+1}$.

8.20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+5}{x-10} \right)^{5x}$.

8.22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{4x+5} \right)^{3x}$.

8.24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-4x}{2-x} \right)^{6x}$.

8.26. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4+3x}{5+x} \right)^{7x}$.

8.28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x}{2-10x} \right)^{5x}$.

8.30. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+5}{4x-2} \right)^{3x}$.

- 9.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}$.
- 9.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}$.
- 9.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}$.
- 9.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x}$.
- 9.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2}$.
- 9.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$.
- 9.7. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.
- 9.8. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}$.
- 9.9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2}$.
- 9.10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{tg} x}$.
- 9.11. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.
- 9.12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2}$.
- 9.13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \sin x}$.
- 9.14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}$.
- 9.15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}$.
- 9.16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}$.
- 9.17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}$.
- 9.18. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}$.
- 9.19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}$.
- 9.20. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \right)$.
- 9.21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}$.
- 9.22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 - x}$.
- 9.23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \arcsin x}$.
- 9.24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}$.
- 9.25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{4x^2}$.
- 9.26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}$.
- 9.27. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{(\pi/2 - x)^2}$.
- 9.28. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi/2 - x) \operatorname{tg} x$.
- 9.29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin x + \sin 7x}$.
- 9.30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}$.

Решение типового варианта

Найти указанные пределы.

1. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 13x + 6}{3x^2 + 2x - 8}$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x^2 + 13x + 6}{3x^2 + 2x - 8} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x-4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{5x+3}{3x-4} = \frac{7}{10} = 0,7. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{4x^2 + 6x - 64}.$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{4x^2 + 6x - 64} = \frac{0}{24} = 0. \blacktriangleleft$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 2x^3 + 5}{6x^4 + 3x^2 - 7x}.$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + 2x^3 + 5}{6x^4 + 3x^2 - 7x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4(7 + 2/x + 5/x^4)}{x^4(6 + 3/x^2 - 7/x^3)} = \frac{7}{6}. \blacktriangleleft$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x - 3}{2x^3 + 4x + 3}.$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10x - 3}{2x^3 + 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(10 - 3/x)}{x^3(2 + 4/x^2 + 3/x^3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10 - 3/x}{x^2(2 + 4/x^2 + 3/x^3)} = \frac{10}{\infty} = 0. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 + 3x^3 - 4x}{3x^2 - 4x + 2}.$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 + 3x^3 - 4x}{3x^2 - 4x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5(2 + 3/x^2 - 4/x^4)}{x^2(3 - 4/x + 2/x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(2 + 3/x^2 - 4/x^4)}{3 - 4/x + 2/x^2} = \frac{-\infty}{3} = -\infty. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{21+x} - 5}{x^3 - 64}.$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{21+x} - 5}{x^3 - 64} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{21+x} - 5)(\sqrt{21+x} + 5)}{(x^3 - 64)(\sqrt{21+x} + 5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{21 + x - 25}{(x^3 - 64)(\sqrt{21+x} + 5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(x^2 + 4x + 16)(\sqrt{21+x} + 5)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(x^2 + 4x + 16)(\sqrt{21+x} + 5)} = \frac{1}{480}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{2-5x}.$$

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{2-5x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x}{2x-3} - 1 \right)^{2-5x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x-2x+3}{2x-3} \right)^{2-5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2x-3} \right)^{2-5x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{2x-3} \right)^{(2x-3)/3} \right)^{3(2-5x)/(2x-3)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{3(2-5x)/(2x-3)} = e^{-15/2}. \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x+3}{2x-5} \right)^{1+7x}.$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x+3}{2x-5} \right)^{1+7x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{1+7x} = 2^{-\infty} = 0. \blacktriangleleft$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin(x/2)}{\pi^2 - x^2}.$$

$$\begin{aligned}
 \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin(x/2)}{\pi^2 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos(\pi/2 - x/2)}{\pi^2 - x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin^2((\pi - x)/4)}{(\pi - x)(\pi + x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin((\pi - x)/4) \sin((\pi - x)/4)}{4 \cdot \frac{\pi - x}{4} (\pi + x)} = \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin((\pi - x)/4)}{\pi + x} = \frac{1}{2} \frac{0}{2\pi} = 0. \blacktriangleleft
 \end{aligned}$$

ИДЗ-5.2

1. Доказать, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ при $x \rightarrow 0$ являются бесконечно малыми одного порядка малости.

1.1. $f(x) = \operatorname{tg} 2x$, $\varphi(x) = \arcsin x$.

1.2. $f(x) = 1 - \cos x$, $\varphi(x) = 3x^2$.

1.3. $f(x) = \operatorname{arctg}^2 3x$, $\varphi(x) = 4x^2$.

1.4. $f(x) = \sin 3x - \sin x$, $\varphi(x) = 5x$.

1.5. $f(x) = \cos 3x - \cos x$, $\varphi(x) = 7x^2$.

1.6. $f(x) = x^2 - \cos 2x$, $\varphi(x) = 6x^2$.

1.7. $f(x) = \sqrt{1+x} - 1$, $\varphi(x) = 2x$.

1.8. $f(x) = \sin x + \sin 5x$, $\varphi(x) = 2x$.

1.9. $f(x) = 3x/(1-x)$, $\varphi(x) = x/(4+x)$.

1.10. $f(x) = 3x^2/(2+x)$, $\varphi(x) = 7x^2$.

1.11. $f(x) = 2x^3$, $\varphi(x) = 5x^3/(4-x)$.

1.12. $f(x) = x^2/(5+x)$, $\varphi(x) = 4x^2/(x-1)$.

1.13. $f(x) = \sin 8x$, $\varphi(x) = \arcsin 5x$.

1.14. $f(x) = \sin 3x + \sin x$, $\varphi(x) = 10x$.

1.15. $f(x) = \cos 7x - \cos x$, $\varphi(x) = 2x^2$.

- 1.16. $f(x) = 1 - \cos 2x$, $\varphi(x) = 8x^2$.
 1.17. $f(x) = 3 \sin^2 4x$, $\varphi(x) = x^2 - x^4$.
 1.18. $f(x) = \operatorname{tg}(x^2 + 2x)$, $\varphi(x) = x^2 + 2x$.
 1.19. $f(x) = \arcsin(x^2 - x)$, $\varphi(x) = x^3 - x$.
 1.20. $f(x) = \sin 7x + \sin x$, $\varphi(x) = 4x$.
 1.21. $f(x) = \sqrt{4 + x} + 2$, $\varphi(x) = 3x$.
 1.22. $f(x) = \sin(x^2 - 2x)$, $\varphi(x) = x^4 - 8x$.
 1.23. $f(x) = 2x/(3 - x)$, $\varphi(x) = 2x - x^2$.
 1.24. $f(x) = x^2/(7 + x)$, $\varphi(x) = 3x^3 - x^2$.
 1.25. $f(x) = \sin(x^2 + 5x)$, $\varphi(x) = x^3 - 25x$.
 1.26. $f(x) = \cos x - \cos^3 x$, $\varphi(x) = 6x^2$.
 1.27. $f(x) = \arcsin 2x$, $\varphi(x) = 8x$.
 1.28. $f(x) = 1 - \cos 4x$, $\varphi(x) = x \sin 2x$.
 1.29. $f(x) = \sqrt{9 - x} - 3$, $\varphi(x) = 2x$.
 1.30. $f(x) = \cos 3x - \cos 5x$, $\varphi(x) = x^2$.

2. Найти пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

- | | |
|--|---|
| 2.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2)}{x^3 - 5x^2}$. | 2.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$. |
| 2.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\operatorname{tg} 2x}$. | 2.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x^3 + 27x}$. |
| 2.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 6x}{2x^2 - 3x}$. | 2.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{2x}$. |
| 2.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 2x}$. | 2.8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{\sin 2x}$. |
| 2.9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}$. | 2.10. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x - 3)}{x^2 - 5x + 6}$. |
| 2.11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{2x^2}$. | 2.12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{4x^2}$. |
| 2.13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\ln(1 + 2x)}$. | 2.14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\operatorname{tg} 5x}$. |
| 2.15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 2x}$. | 2.16. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}(x + 2)}{x^2 - 4}$. |
| 2.17. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x + 2)}{x^3 + 8}$. | 2.18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg} 4x}$. |
| 2.19. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{\operatorname{tg}(x - 4)}$. | 2.20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}$. |
| 2.21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x^3)}{2x^3}$. | 2.22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\operatorname{tg} 2x}$. |

$$2.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}.$$

$$2.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg} 4x}.$$

$$2.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$2.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}.$$

$$2.27. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^3 - 27}.$$

$$2.28. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\operatorname{tg}(x+5)}{x^2 - 25}.$$

$$2.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{2x^2}.$$

$$2.30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}.$$

3. Исследовать данные функции на непрерывность и построить их графики.

$$3.1. f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2+2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$3.2. f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ (x+1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ -x+4, & x > 2. \end{cases}$$

$$3.3. f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1, \\ -x+3, & x > 1. \end{cases}$$

$$3.4. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$3.5. f(x) = \begin{cases} -2(x+1), & x \leq -1, \\ (x+1)^3, & -1 < x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$3.6. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$$

$$3.7. f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 3, \\ x+2, & x > 3. \end{cases}$$

$$3.8. f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x \leq 4, \\ 3+x, & x > 4. \end{cases}$$

$$3.9. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

$$3.10. f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ 2+x, & x > 1. \end{cases}$$

- 3.11. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$
- 3.12. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < x < \pi, \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases}$
- 3.13. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$
- 3.14. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x^2-1, & 0 \leq x < 1, \\ -x, & x \geq 1. \end{cases}$
- 3.15. $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2+1, & 0 \leq x < 2, \\ x+1, & x \geq 2. \end{cases}$
- 3.16. $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 2, \\ x^2-2, & x > 2. \end{cases}$
- 3.17. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ 3, & x \geq \pi. \end{cases}$
- 3.18. $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < -1, \\ x^2+1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$
- 3.19. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 2^x, & 0 < x \leq 2, \\ x+3, & x > 2. \end{cases}$
- 3.20. $f(x) = \begin{cases} -x+2, & x \leq -2, \\ x^3, & -2 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$
- 3.21. $f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \leq -1, \\ x^2-2, & -1 < x < 2, \\ x, & x \geq 2. \end{cases}$
- 3.22. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x-2)^2, & 1 < x < 3, \\ -x+6, & x \geq 3. \end{cases}$
- 3.23. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 1, \\ x^2+2, & 1 \leq x \leq 2, \\ -2x, & x > 2. \end{cases}$

$$3.24. f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -1, \\ x - 1, & -1 \leq x \leq 3, \\ -x + 5, & x > 3. \end{cases}$$

$$3.25. f(x) = \begin{cases} x, & x < -2, \\ -x + 1, & -2 \leq x \leq 1, \\ x^2 - 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$3.26. f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 0, \\ -x^2 + 4, & 0 < x < 2, \\ x - 2, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$3.27. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ x^2 - 1, & -1 < x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

$$3.28. f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1 - x, & x > \pi. \end{cases}$$

$$3.29. f(x) = \begin{cases} 2, & x < -1, \\ 1 - x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$$

$$3.30. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 2, \\ x + 4, & x > 2. \end{cases}$$

4. Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках.

$$4.1. f(x) = 2^{1/(x-3)} + 1; x_1 = 3, x_2 = 4.$$

$$4.2. f(x) = 5^{1/(x-3)} - 1; x_1 = 3, x_2 = 4.$$

$$4.3. f(x) = (x + 7)/(x - 2); x_1 = 2, x_2 = 3.$$

$$4.4. f(x) = (x - 5)/(x + 3); x_1 = -2, x_2 = -3.$$

$$4.5. f(x) = 4^{1/(3-x)} + 2; x_1 = 2, x_2 = 3.$$

$$4.6. f(x) = 9^{1/(2-x)}; x_1 = 0, x_2 = 2.$$

$$4.7. f(x) = 2^{1/(x-5)} + 1; x_1 = 4, x_2 = 5.$$

$$4.8. f(x) = 5^{1/(x-4)} - 2; x_1 = 3, x_2 = 4.$$

$$4.9. f(x) = 6^{1/(x-3)} + 3; x_1 = 3, x_2 = 4.$$

$$4.10. f(x) = 7^{1/(5-x)} + 1; x_1 = 4, x_2 = 5.$$

$$4.11. f(x) = (x - 3)(x + 4); x_1 = -5, x_2 = -4.$$

$$4.12. f(x) = (x + 5)/(x - 2); x_1 = 3, x_2 = 2.$$

$$4.13. f(x) = 5^{2/(x-3)}; x_1 = 3, x_2 = 4.$$

$$4.14. f(x) = 4^{2/(x-1)} - 3; x_1 = 1, x_2 = 2.$$

$$4.15. f(x) = 2^{5/(1-x)} - 1; x_1 = 0, x_2 = 1.$$

$$4.16. f(x) = 8^{4/(x-2)} - 1; x_1 = 2, x_2 = 3.$$

$$4.17. f(x) = 5^{4/(3-x)} + 1; x_1 = 2, x_2 = 3.$$

$$4.18. f(x) = 3x/(x - 4); x_1 = 4, x_2 = 5.$$

- 4.19. $f(x) = 2x/(x^2 - 1)$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.
 4.20. $f(x) = 2^{3/(x+2)} + 1$; $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.
 4.21. $f(x) = 4^{3/(x-2)} + 2$; $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
 4.22. $f(x) = 3^{2/(x+1)} - 2$; $x_1 = -1$, $x_2 = 0$.
 4.23. $f(x) = 5^{3/(x+4)} + 1$; $x_1 = -5$, $x_2 = -4$.
 4.24. $f(x) = (x - 4)/(x + 2)$; $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.
 4.25. $f(x) = (x - 4)/(x + 3)$; $x_1 = -3$, $x_2 = -2$.
 4.26. $f(x) = (x + 5)/(x - 3)$; $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.
 4.27. $f(x) = 3^{4/(1-x)} + 1$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.
 4.28. $f(x) = 4x/(x + 5)$; $x_1 = -5$, $x_2 = -4$.
 4.29. $f(x) = 6^{2/(4-x)}$; $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.
 4.30. $f(x) = (x + 1)/(x - 2)$; $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Решение типового варианта

1. Доказать, что функции $f(x) = \cos 2x - \cos^3 2x$ и $\varphi(x) = 3x^2 - 5x^3$ при $x \rightarrow 0$ являются бесконечно малыми одного порядка малости.

► Находим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{3x^2 - 5x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x(1 - \cos^2 2x)}{x^2(3 - 5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \cdot \frac{\cos 2x \cdot \sin^2 2x}{x^2(3 - 5x)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 \cos 2x \cdot \sin 2x \cdot \sin 2x}{2x2x(3 - 5x)} = 8/3. \end{aligned}$$

Так как предел отношения функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ равен отличной от нуля постоянной, то в соответствии с определением (см. формулу (5.1)) данные функции — бесконечно малые одного порядка малости. ◀

2. Найти предел, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

► Имеем: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{\ln(1 + 4x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{4x} = 2$. ◀

3. Исследовать данную функцию на непрерывность и построить ее график:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x \leq 0, \\ (x-1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ 5-x, & 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

► Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ и $(2; +\infty)$, где она задана непрерывно.

ными элементарными функциями. Следовательно, разрыв возможен только в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Для точки $x_1 = 0$ имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} x^2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (x-1)^2 = 1,$$

$$f(0) = x^2|_{x=0} = 0,$$

т. е. функция $f(x)$ в точке $x_1 = 0$ имеет разрыв первого рода.

Для точки $x_2 = 2$ находим:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x-1)^2 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (5-x) = 3,$$

$$f(2) = (x-1)^2|_{x=2} = 1,$$

т. е. в точке $x_2 = 2$ функция также имеет разрыв первого рода.

График данной функции изображен на рис. 5.1. ◀

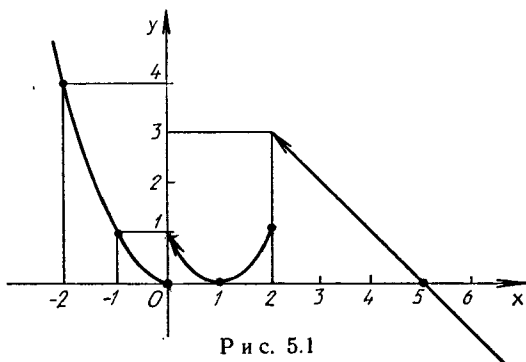


Рис. 5.1

4. Исследовать функцию $f(x) = 8^{1/(x-3)} + 1$ на непрерывность в точках $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

► Для точки $x_1 = 3$ имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-0} (8^{1/(x-3)} + 1) = 8^{-\infty} + 1 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+0} (8^{1/(x-3)} + 1) = 8^{\infty} + 1 = \infty,$$

т. е. в точке $x_1 = 3$ функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв ($x_1 = 3$ — точка разрыва второго рода).

Для точки $x_2 = 4$ имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-0} (8^{1/(x-3)} + 1) = 9,$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4+0} (8^{1/(x-3)} + 1) = 9,$$

$$f(4) = 8^{1/(4-3)} + 1 = 9.$$

Следовательно, в точке $x_2 = 4$ функция $f(x)$ непрерывна. ◀

5.6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 5

Найти указанные пределы.

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^{100} - n^{100} - 200n^{99}}{n^{98} - 10n^2 + 1}$. (Ответ: 19 800.)

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg(n^2 + 2n \cos n + 1)}{1 + \lg(n+1)}$. (Ответ: 2.)

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^2 - n + 1)}{\ln(n^{10} + n + 1)}$. (Ответ: $\frac{1}{5}$.)

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$ ($a \neq 0$). (Ответ: $\begin{cases} 1, & |a| > 1, \\ 0, & |a| = 1, \\ -1, & |a| < 1. \end{cases}$)

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$. (Ответ: $\frac{1}{3}$.)

6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{101} - 101x + 100}{x^2 - 2x + 1}$. (Ответ: 5050.)

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{2x^2 + 10x + 1} - \sqrt[7]{2x^2 + 10x + 1}}{x}$. (Ответ: $\frac{4}{7}$.)

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{(1+x^2)(2+x^2)\dots(n+x^2)} - x^2)$ ($n \in \mathbf{N}$).
(Ответ: $\frac{n+1}{2}$.)

9. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x} - x)^{1/x}$. (Ответ: $\frac{1}{\sqrt{e}}$.)

10. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}$. (Ответ: $\frac{1}{2\pi}$.)

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(ax+1)^n}{x^n + b}$, где $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$; a, b — постоянные.
(Ответ: a^n , если $n > 0$; 0, если $n < 0$, $b \neq 0$; a^n , если $n < 0$, $a \neq 0$, $b = 0$; ∞ , если $n < 0$, $a = b = 0$.)

12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{3^n} \right)$. (Ответ: $\frac{1}{4}$.)

Найти точки разрыва данных функций, указать характер точек разрыва и построить графики этих функций.

13. $y = 1/\lg|x|$. (Ответ: $x_1 = 0$ — устранимая точка

разрыва, $x_{2,3} = \pm 1$ — точки разрывов второго рода.)

14. $y = x \sin(\pi/x)$. (Ответ: $x = 0$ — устранимая точка разрыва.)

15. $y = 1/(1 + 3^{1/x})$. (Ответ: $x = 0$ — точка разрыва первого рода.)

16. $y = 1/(1 + 2^{\lg x})$. (Ответ: $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$ — точки разрыва первого рода.)

17. $y = (1 + 1/x)^x$. (Ответ: $x = -1$ — точка разрыва второго рода, $x = 0$ — устранимая точка разрыва.)

18. $y = 1/(1 - e^{1-x})$. (Ответ: $x = 1$ — точка разрыва второго рода.)

19. Круглая пластина радиусом a с закрепленными краями находится под действием силы P , приложенной к ее центру. Прогиб на расстоянии x от центра пластины выражается следующей формулой:

$$y = Pkx^2 \ln \frac{x}{a} + P \frac{k}{2}(a^2 - x^2),$$

где k — коэффициент, связанный с прочностными характеристиками материала и формой пластины. Найти прогиб в центре пластины. (Ответ: $Pka^2/2$.)

20. Шарнирно-опорная балка под действием равномерно распределенной нагрузки q и сжимающей силы N прогибается. Прогиб в середине балки вычисляется по формуле

$$f = \frac{ql^4}{EIu^4} \left(\frac{1}{\cos(u/2)} - 1 - \frac{u^2}{8} \right),$$

где $u = l\sqrt{\frac{N}{EI}}$; EI — жесткость балки; l — длина балки.

Показать, что: а) при $u \rightarrow 0$ ($EI \rightarrow \infty$) балка не должна прогибаться, т. е. $f \rightarrow 0$; б) при $u \rightarrow \pi$ ($N \rightarrow \pi^2 EI/l^2$) $f \rightarrow \infty$, т. е. существует критическая сила, при которой балка «разрушается», что математически соответствует ее бесконечному прогибу.

6. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

6.1. ПРОИЗВОДНАЯ, ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ. ПРАВИЛА И ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Напомним, что *приращением функции* $y = f(x)$ называется разность

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

где Δx — приращение аргумента x . Из рис. 6.1 видно, что

$$\Delta y / \Delta x = \operatorname{tg} \beta. \quad (6.1)$$

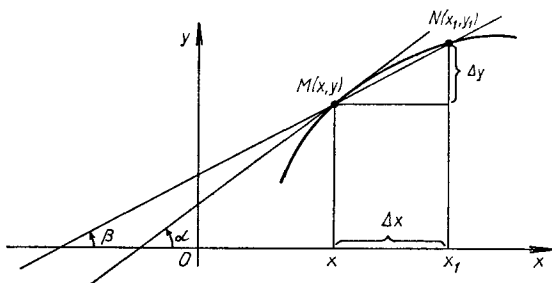


Рис. 6.1

Предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю называется *производной функции* $y = f(x)$ в точке x и обозначается одним из следующих символов: y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$. Таким образом, по определению

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (6.2)$$

Если указанный в формуле (6.2) предел существует, то функцию $f(x)$ называют *дифференцируемой в точке x* , а операцию нахождения производной y' — *дифференцированием*.

Из равенства (6.1) и определения производной (см. формулу (6.2)) следует, что производная в точке x равна тангенсу угла α наклона касательной, проведенной в точке $M(x, y)$, к графику функции $y = f(x)$ (см. рис. 6.1).

Легко показать, что с физической точки зрения производная $y' = f'(x)$ определяет скорость изменения функции в точке x относительно аргумента x .

Если C — постоянное число и $u = u(x)$, $v = v(x)$ — некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие *правила дифференцирования*:

- 1) $(C)' = 0$;
- 2) $(x)' = 1$;
- 3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
- 4) $(Cu)' = Cu'$;
- 5) $(uv)' = u'v + uv'$;
- 6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ ($v \neq 0$);
- 7) $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$ ($v \neq 0$);

8) если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, т. е. $y = f(\varphi(x))$ — сложная функция, составленная из дифференцируемых функций, то

$$y'_x = y'_u u'_x \text{ или } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx};$$

9) если для функции $y = f(x)$ существует обратная дифференцируемая функция $x = g(y)$ и $\frac{dg}{dy} = g'(y) \neq 0$, то

$$f'(x) = 1/g'(y).$$

На основании определения производной и правил дифференцирования можно составить *таблицу производных основных элементарных функций*:

- | | |
|--|---|
| 1) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} u'$ ($\alpha \in \mathbf{R}$); | 3) $(e^u)' = e^u u'$; |
| 2) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$; | 5) $(\ln u)' = \frac{1}{u} u'$; |
| 4) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} u'$; | 7) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$; |
| 6) $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$; | 9) $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$; |
| 8) $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$; | 11) $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$; |
| 10) $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$; | 13) $(\operatorname{arccot} u)' = -\frac{1}{1+u^2} u'$; |
| 12) $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} u'$; | 15) $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$; |
| 14) $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$; | 17) $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} u'$; |
| 16) $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} u'$; | |

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали (перпендикуляра) к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

При $f'(x_0) = 0$ уравнение нормали имеет вид $x = x_0$.

Углом между кривыми в точке их пересечения называют угол между касательными к кривым в этой точке.

Пример 1. Найти производную функции $y = \frac{2x}{3x+1}$, воспользовавшись определением производной (см. формулу (6.2)).

► При любом приращении Δx имеем:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{2(x+\Delta x)}{3(x+\Delta x)+1} - \frac{2x}{3x+1} = \frac{6x^2+6x\Delta x+2\Delta x-6x^2-6x\Delta x-2x}{(3(x+\Delta x)+1)(3x+1)} = \\ &= \frac{2\Delta x}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)}. \end{aligned}$$

Так как

$$\Delta y/\Delta x = \frac{2}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)},$$

то

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{(3x+3\Delta x+1)(3x+1)} = \frac{2}{(3x+1)^2}. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Найти значение производной функции $y = |x|$ в точке $x = 0$.

► При любом приращении независимой переменной x , равном Δx , приращение функции в точке $x = 0$

$$\Delta y = |\Delta x| = \begin{cases} -\Delta x, & \text{если } \Delta x < 0, \\ \Delta x, & \text{если } \Delta x > 0. \end{cases}$$

Из определения производной следует, что

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \text{если } \Delta x < 0, \\ 1, & \text{если } \Delta x > 0. \end{cases}$$

Это означает, что в точке $x = 0$ функция $y = |x|$ не имеет производной, хотя она и непрерывна в этой точке, поскольку

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0. \blacktriangleleft$$

Таким образом, не всякая функция, непрерывная в некоторой точке x , дифференцируема в этой точке. Но легко показать, что любая функция непрерывна во всех тех точках x , в которых она дифференцируема.

А3-6.1

1. Найти производную функции $y = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, воспользовавшись определением производной (см. формулу (6.2)).

2. Установить, будет ли функция $y = \sqrt[3]{x}$ непрерывной и дифференцируемой в точке $x = 0$.

3. Найти производные следующих функций:

а) $y = 5x^4 - 3\sqrt[7]{x^3} + 7/x^5 + 4;$

б) $y = x^3 \sin x;$

в) $y = (x^4 + 1)/(x^4 - 1);$

$$г) y = (x^5 + 3x - 1)^4;$$

$$д) y = \sqrt[3]{((x^3 + 1)/(x^3 - 1))^2}.$$

4. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 2x - 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. (Ответ: $y - 5x + 4 = 0$; $5y + x - 6 = 0$.)

5. Найти углы, под которыми пересекаются линии, заданные уравнениями $y = x^2$ и $x^2 + 2y^2 = 3$. (Ответ: 90° , 90° .)

Самостоятельная работа

1. 1. Найти производные следующих функций:

$$а) y = 3x^3 + 5\sqrt[3]{x^5} - 4/x^3;$$

$$б) y = x^3 \sin x \cdot \ln x;$$

$$в) y = \sqrt{(x^3 + 1)/(x^3 - 1)}.$$

2. Записать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \ln(x^2 - 4x + 4)$ в точке $x_0 = 1$. (Ответ: $2x + y - 2 = 0$; $x - 2y - 1 = 0$.)

2. 1. Воспользовавшись определением производной (см. формулу (6.2)), найти производную функции $y = (3x - 1)/(2x + 5)$. (Ответ: $y' = 17/(2x + 5)^2$.)

2. Найти производные следующих функций:

$$а) y = \sqrt[7]{x^5} - 2/x^4 + 7x^6;$$

$$б) y = (x^9 + 1) \cos 5x;$$

$$в) y = ((x^4 + 1)/(x^4 - 1))^3.$$

3. 1. Найти производные следующих функций:

$$а) y = 4\sqrt{x} + 4/\sqrt{x} + 3x^2;$$

$$б) y = x^3 \operatorname{tg} x \cdot e^{2x};$$

$$в) y = (\sin^2 x)/(x^3 + 1).$$

2. Расстояние, пройденное материальной точкой за

время t с, $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + 1$ (s — в метрах). Найти скорость движения данной точки в моменты времени $t = 0$; 1; 2 с. (Ответ: 2 м/с; 2 м/с; 6 м/с.)

А3-6.2

Используя формулы и правила дифференцирования, найти производные данных функций.

$$1. а) y = x^3 \sin 3x; \quad б) y = e^x \operatorname{tg} 4x;$$

$$в) y = \sqrt[3]{x^4 + \sin^4 x}; \quad г) y = x \operatorname{ctg}^2 7x;$$

- д) $y = 2^{-\cos^4 5x}$; е) $y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}$
 2. а) $y = (2^{x^4} - \operatorname{tg}^4 x)^3$; б) $y = \ln^5(x - 2^{-x})$;
 в) $y = \sin(\operatorname{tg} \sqrt{x})$; г) $y = x \sin^2 x \cdot 2^{x^2}$;
 д) $y = 2^{x/\ln x}$; е) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}$.
 3. а) $y = e^{-\sqrt{x^2+2x+2}}$; б) $y = \operatorname{sh}^3 x^2$;
 в) $y = (2^{\operatorname{tg} 3x} + \operatorname{tg} 3x)^2$; г) $y = 3^{\operatorname{tg}^3 5x}$.

Самостоятельная работа

Найти производные следующих функций.

1. а) $y = x \sin^3 3x$; б) $y = \sqrt{\frac{\cos^2 x + 1}{\sin 2x + 1}}$;
 в) $y = (2^{\cos 3x} + \sin 3x)^3$; г) $y = x \cos^2 x \cdot e^{x^2}$.
 2. а) $y = x^3 e^{\operatorname{lg} 3x}$; б) $y = (\sin^3 x + \cos^3 2x)^2$;
 в) $y = \ln(x^4 - \sin^3 x)$; г) $y = x \sin 7x \cdot \operatorname{tg}^2 x$.
 3. а) $y = x \operatorname{ctg}^2 5x$; б) $y = (x^3 + \operatorname{tg}^3 2x)^2$;
 в) $y = \sin(x^5 - \operatorname{tg}^2 x)$; г) $y = x^3 \cos 2x \cdot e^{-x^2}$.

6.2. ЛОГАРИФИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т. е.

$$(\ln f(x))' = f'(x)/f(x).$$

Последовательное применение логарифмирования и дифференцирования функций называют логарифмическим дифференцированием. В некоторых случаях предварительное логарифмирование функции упрощает нахождение ее производной. Например, при нахождении производной функции $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$, предварительное логарифмирование приводит к формуле

$$y' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'.$$

Пример 1. Найти производную функции $y = (\sin 2x)^{x^2}$

► Логарифмируя данную функцию, получаем

$$\ln y = x^2 \ln \sin 2x.$$

Дифференцируем обе части последнего равенства по x :

$$(\ln y)' = (x^2)' \ln \sin 2x + x^2 (\ln \sin 2x)'.$$

Отсюда

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 \ln \sin 2x + x^2 \frac{1}{\sin 2x} 2 \cos 2x.$$

Далее,

$$y' = y(3x^2 \ln \sin 2x + 2x^3 \operatorname{ctg} 2x).$$

Окончательно имеем:

$$y' = (\sin 2x)^{x^2} (3x^2 \ln \sin 2x + 2x^3 \operatorname{ctg} 2x). \blacktriangleleft$$

Если зависимость между переменными y и x задана в неявном виде уравнением $F(x, y) = 0$, то для нахождения производной $y' = y'_x$ в простейших случаях достаточно продифференцировать обе части уравнения $F(x, y) = 0$, считая y функцией от x , и из полученного уравнения, линейного относительно y' , найти производную.

Пример 2. Найти производную функции y' , если $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

► Дифференцируем обе части данного уравнения, считая y функцией от x :

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3y - 3xy' = 0.$$

Отсюда находим

$$y' = (3x^2 - 3y) / (3x - 3y^2). \blacktriangleleft$$

А3-6.3

1. Найти производные указанных функций:

а) $y = 3x^2 - \operatorname{tg}^4 2x$; б) $y = x^3 \operatorname{th}^3 x$;

в) $y = \lg^4(x^5 - \sin^5 2x)$; г) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{1 + e^{-x^3}}$.

2. Найти производные следующих функций:

а) $y = (\sin 3x)^{\cos 5x}$; б) $y = (x^3 + 1)^{\lg 2x}$.

3. Найти производные функций y , заданных неявно следующими уравнениями:

а) $e^{xy} - x^3 - y^3 = 3$; б) $xy - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = 3$; в) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = a$. (Ответ: а) $y' = (3x^2 - e^{xy}y) / (-3y^2 + e^{xy}x)$;
б) $y' = -(x^2y + y^3 - x) / (x^3 + xy^2 + y)$; в) $y = -\sqrt[3]{(y/x)^2}$.)

Самостоятельная работа

Найти производные данных функций.

1. а) $y = x^3 \ln^2(\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x)$; б) $y = (\operatorname{tg} 3x)^{x^4}$;

в) $e^{x^2y^2} - x^4 + y^4 = 5$. (Ответ: $y' = \frac{e^{x^2y^2} \cdot 2xy - 4x^3}{4y^3 - e^{x^2y^2} \cdot 2yx^2}$.)

2. а) $y = \operatorname{ctg}^2 3x \cdot e^{-\cos^2 3x}$; б) $y = (1 + x^4)^{\lg 7x}$;

в) $y^2 + x^2 - \sin(x^2y^2) = 5$. (Ответ: $y' = \frac{2xy^2 \cos(x^2y^2) - 2x}{2y - 2yx^2 \cos(x^2y^2)}$.)

3. а) $y = e^{-x^2} \operatorname{arctg} \sqrt{x^3 - 1}$; б) $y = (\operatorname{ctg} 5x)^{x^3 - 1}$;

в) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$. (Ответ: $y' = -\frac{2^x - 2^{x+y}}{2^y - 2^{x+y}}$.)

6.3. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Производной второго порядка или второй производной функции $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной, т. е. $(y')'$.

Обозначается вторая производная одним из следующих символов: y'' , $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. Если $s = s(t)$ — закон прямолинейного движения материальной точки, то $s' = \frac{ds}{dt}$ — скорость, а $s'' = \frac{d^2s}{dt^2}$ — ускорение этой точки.

Если зависимость функции y от аргумента x задана в параметрическом виде уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{y'}{x'} \right) \frac{1}{x'}, \quad (6.3)$$

где штрих обозначает производную по t .

Производной n -го порядка функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка данной функции. Для n -й производной употребляются следующие обозначения: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$. Таким образом,

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = \frac{dy^{(n-1)}}{dx}.$$

Пример 1. Найти производную второго порядка функции $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$.

► Имеем:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) = \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{(x + \sqrt{x^2 + a^2})\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ y'' &= -\frac{1}{2} (x^2 + a^2)^{-3/2} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить значения первой и второй производных функции $y = (2x - 1)^4$ в точках $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

► Находим первую производную: $y' = 8(2x - 1)^3$. При $x = 1$ имеем $y'(1) = 8$, а при $x = -1$ $y'(-1) = -216$.

Далее, $y'' = 48(2x - 1)^2$, $y''(1) = 48$, $y''(-1) = 432$. ◀

Пример 3. Найти производную n -го порядка функции $y = \sin x$.

► Дифференцируя последовательно n раз данную функцию, находим:

$$\begin{aligned} y' &= \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right), \\ y'' &= \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \\ y''' &= \cos \left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2} \right), \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(n)} &= \cos \left(x + (n-1) \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right). \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 4. Найти вторую производную функции, заданной параметрическими уравнениями: $x = \ln t$, $y = t^3 + 2t + 1$.

► В соответствии с формулами (6.3) имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 + 2}{1/t} = 3t^3 + 2t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9t^2 + 2}{1/t} = 9t^3 + 2t. \quad \blacktriangleleft$$

А3-6.4

1. Найти вторую производную функции $y = (1 + 4x^2) \operatorname{arctg} 2x$.

2. Найти значения производных любого порядка функции $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ в точке $x = 2$.

3. Дано уравнение движения точки по оси Ox : $x = 100 - 5t - 0,001t^3$ (x измеряется в метрах, t — в секундах). Найти скорость v и ускорение w этой точки в моменты времени $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 10$ с. (Ответ: $v = 5$; 4,997; 4,7 м/с, $w = 0$; $-0,006$; $-0,06$ м/с².)

4. Найти вторые производные функций, заданных уравнениями:

$$\text{а) } \begin{cases} y = t^3 + t^2 - 1, \\ x = t^2 + t + 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y = 2 \sin^3 t, \\ x = 2 \cos^3 t. \end{cases}$$

5. Вычислить значение второй производной функции y , заданной уравнением $x^4 - xy + y^4 - 1$, в точке $M(0, 1)$. (Ответ: $-1/16$.)

6. Записать уравнения касательной и нормали в точке $M_0(2, 2)$ к кривой $x = \frac{1+t}{t^3}$, $y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}$. (Ответ: $7x - 10y + 6 = 0$, $10x + 7y - 34 = 0$.)

7. Показать, что функция $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$ при любых постоянных C_1 и C_2 удовлетворяет уравнению $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Самостоятельная работа

1. 1) Найти производную второго порядка функции $y = (x^2 + 1) \cdot \ln(1 + x^2)$;

2) найти вторую производную функции, заданной уравнениями: $y = t^3 + t$, $x = t^2 - 2t$;

3) вычислить значение второй производной функции y , заданной уравнением $e^y + y - x = 0$, в точке $M_1(1, 0)$. (Ответ: $-1/8$.)

2. 1) Найти производную второго порядка функции $y = e^{-3x} \cdot (\cos 2x + \sin 2x)$;

2) найти производную второго порядка функции, заданной уравнениями: $y = t^3 + t^2 + 1$, $x = 1/t$;

3) вычислить значение второй производной функции y , заданной уравнением $x^3 + y^3 - xy = 1$, в точке $M_1(1, 1)$. (Ответ: -7 .)

3. 1) Найти вторую производную функции $y = \sqrt{1-4x^2} \arcsin 2x$;

2) найти производную второго порядка функции, заданной уравнениями: $y = (2t + 1) \cos t$, $x = \ln t$;

3) вычислить значение второй производной функции y , заданной уравнением $x^2 + 2y^2 - xy + x + y = 4$, в точке $M_1(1, 1)$. (Ответ: -1 .)

6.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПЕРВОГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

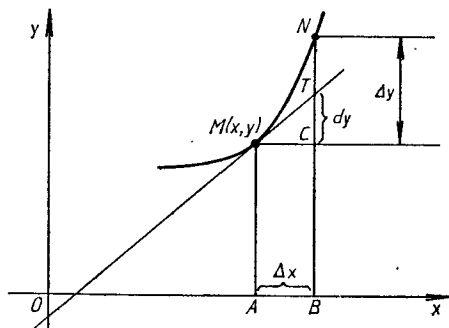
Дифференциалом первого порядка функции $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейно зависящая от приращения $\Delta x = dx$ независимой переменной x . Дифференциал dy функции равен произведению ее производной и дифференциала независимой переменной:

$$dy = y' dx = f'(x) dx,$$

поэтому справедливо равенство

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Из рис. 6.2 видно, что если MN — дуга графика функции $y = f(x)$, MT — касательная, проведенная к нему в точке $M(x, y)$, и $AB = \Delta x = dx$, то $CT = dy$, а отрезок $CN = \Delta y$. Дифференциал функции dy отличается от ее приращения Δy на бесконечно малую высшего порядка по срав-



Р и с. 6.2

нению с Δx . Непосредственно из определения дифференциала и правил нахождения производных имеем ($u = u(x)$, $v = v(x)$):

- 1) $dC = 0$ ($C = \text{const}$);
- 2) $dx = \Delta x$, если x — независимая переменная;
- 3) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
- 4) $d(uv) = vdu + udv$;
- 5) $d(Cu) = Cdu$;
- 6) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ ($v \neq 0$);
- 7) $df(u) = f'_u(u)u'dx = f'(u)du$.

Пример 1. Найти дифференциал функции $y = \sin^5 3x$.

► Находим производную данной функции:

$$y' = 5 \sin^4 3x \cdot \cos 3x \cdot 3,$$

тогда

$$dy = 15 \sin^4 3x \cdot \cos 3x dx. \blacktriangleleft$$

Дифференциалом n -го порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$ -го порядка этой функции, т. е.

$$d^n y = d(d^{n-1} y).$$

Если дана функция $y = f(x)$, где x — независимая переменная, то

$$d^2 y = y'' dx^2, \quad d^3 y = y''' dx^3, \quad \dots, \quad d^n y = y^{(n)} dx^n.$$

Если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то

$$d^2 y = y'' (du)^2 + y' d^2 u,$$

где дифференцирование функции y выполняется по переменной u . (Это имеет место и для дифференциалов более высоких порядков.)

Пример 2. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \ln(1+x^2)$.

► Имеем:

$$y' = 2x/(1+x^2), \quad y'' = (2(1+x^2) - 4x^2)/(1+x^2)^2 = 2(1-x^2)/(1+x^2)^2.$$

Тогда

$$d^2 y = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} dx^2. \blacktriangleleft$$

Так как дифференциал функции отличается от ее приращения на бесконечно малую высшего порядка по сравнению с величиной dx , то $\Delta y \approx dy$, или $f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)dx$, откуда

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx.$$

Полученная формула часто применяется для приближенного вычисления значений функции при малом приращении Δx независимой переменной x .

Пример 3. Вычислить приращение стороны куба, если известно, что его объем увеличился от 27 до 27,1 м³.

► Если x — объем куба, то его сторона $y = \sqrt[3]{x}$. По условию задачи $x = 27$, $\Delta x = 0,1$. Тогда приращение стороны куба

$$\Delta y \approx dy = y'(x)\Delta x = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} \cdot 0,1 = \frac{0,1}{27} \approx 0,0037 \text{ м.} \blacktriangleleft$$

Пример 4. Найти приближенно $\sin 31^\circ$.

► Полагаем $x = \pi/6$, тогда

$$\Delta x = 1^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 0,017,$$

$$\sin 31^\circ \approx \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot 0,017 = 0,5 + 0,017 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,515. \blacktriangleleft$$

С помощью дифференциала функции вычисляют абсолютную погрешность функции ε_y , если известна абсолютная погрешность ε_x аргумента. В практических задачах значения аргумента находятся с помощью измерений, и его абсолютная погрешность считается известной.

Пусть требуется вычислить значение функции $y = f(x)$ при некотором значении аргумента x , истинная величина которого нам неизвестна, но дано его приближенное значение x_0 с абсолютной погрешностью ε_x : $x = x_0 + dx$, $|dx| \leq \varepsilon_x$. Тогда

$$|f(x) - f(x_0)| \approx |f'(x_0)| |dx| < |f'(x_0)| \varepsilon_x.$$

Отсюда видно, что $\varepsilon_y = |f'(x_0)| \varepsilon_x$.

Относительная погрешность функции δ_y выражается формулой

$$\delta_y = \frac{\varepsilon_y}{|f(x_0)|} = \left| \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \right| \varepsilon_x = |(\ln f(x_0))'| \varepsilon_x.$$

Например, если в примере 4 принять $\varepsilon_x = 0,017$, то

$$\varepsilon_y = \left| \cos \frac{\pi}{6} \right| \cdot 0,017 = 0,015,$$

$$\delta_y = \frac{0,015}{0,5} \cdot 100 \% = 3 \%. \quad \blacksquare$$

А3-6.5

1. Даны функция $y = x^3 - 2x^2 + 2$ и точка $x_0 = 1$. Для любого приращения независимой переменной Δx выделить главную часть приращения функции. Оценить абсолютную величину разности между приращением функции и ее дифференциалом в данной точке, если: а) $\Delta x = 0,1$; б) $\Delta x = 0,01$. Сравнить эту разность с абсолютной величиной дифференциала функции. (Ответ: а) $\varepsilon = |\Delta y - dy| = 0,011$, $\varepsilon/|dy| \cdot 100 \% = 11 \%$; б) $\varepsilon = 0,000101$, $\varepsilon/|dy| \times 100 \% = 1,01 \%$.)

2. Найти дифференциалы первого порядка следующих функций:

а) $y = x \operatorname{tg}^3 x$; б) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x + (\arcsin x)^2}$;

в) $y = \ln(x + \sqrt{4 + x^2})$.

3. Найти дифференциал второго порядка функции $y = e^{-x^2}$.

4. Найти дифференциалы третьего порядка функций:

а) $y = \sin^2 2x$; б) $y = \frac{\ln x}{x}$.

5. Найти приближенное значение функции $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ при $x = 1,03$ с точностью до двух знаков после запятой. (Ответ: 5,00.)

6. Найти приближенное значение $\sqrt[4]{17}$ с точностью до двух знаков после запятой. (Ответ: 2,03.)

Самостоятельная работа

1. 1) Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции $y = x^3 \ln x$;

2) найти приближенное значение функции $y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$ при $x = 0,1$ с точностью до двух знаков после запятой. (Ответ: 1,03.)

2. 1) Найти дифференциалы первого и второго порядков функции $y = (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x$;

2) вычислить приближенное значение функции $y = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$ при $x = 0,98$ с точностью до двух знаков после запятой. (Ответ: 2,09.)

3. 1) Найти дифференциалы второго и третьего порядков функции $y = e^{-3x} \cos 2x$;

2) вычислить приближенное значение функции $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 12}$ при $x = 1,3$ с точностью до двух знаков после запятой. (Ответ: 2,08.)

6.5. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ — БЕРНУЛЛИ

Теорема 1 (Ролля). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема внутри этого отрезка и $f(a) = f(b)$, то существует по крайней мере одна точка $x = c$ ($a < c < b$), такая, что $f'(c) = 0$.

Теорема 2 (Лагранжа). Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема внутри этого отрезка, то существует по крайней мере одна точка $x = c$ ($a < c < b$), такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Эта формула называется формулой Лагранжа конечных приращений.

Теорема 3 (Коши). Если функции $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы внутри него, причем $\varphi'(x) \neq 0$ нигде при $a < x < b$, то найдется хотя бы одна точка $x = c$ ($a < c < b$), такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Правило Лопитала (для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$). Если функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши в некоторой окрестности точки $x=x_0$, стремятся к нулю (или $\pm\infty$) при $x \rightarrow x_0$ и существует $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует также $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ и эти пределы равны, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Правило Лопитала справедливо и при $x_0 = \pm\infty$.

Если частное $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ вновь дает в предельной точке неопределенность одного из двух названных видов и функции $f'(x)$, $\varphi'(x)$ удовлетворяют всем требованиям, ранее указанным для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, то можно перейти к отношению вторых производных и т. д. Однако следует помнить, что предел отношения самих функций может существовать, в то время как отношение производных не стремится ни к какому пределу.

Пример 1. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x}$.

► Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \sin x/x}{1 + \cos x/x} = 1.$$

Но предел вида

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x + \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$$

не существует, так как при $x \rightarrow \infty$ числитель и знаменатель дроби могут принимать любые значения из отрезка $[0; 2]$, а само отношение производных принимает любые неотрицательные значения. Следовательно, правило Лопитала в этом случае неприменимо. ◀

Пример 2. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 5x}$.

► Числитель и знаменатель данной дроби непрерывны, дифференцируемы и стремятся к нулю. Это означает, что можно применить правило Лопитала:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x}}{5 \cos 5x} = \frac{3}{5}. \quad \blacktriangleleft$$

Неопределенность вида $0 \cdot \infty$ получается из произведения функций $f_1(x)f_2(x)$, в котором $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = \infty$. Это произведение легко преобразуется в частное вида $\frac{f_1(x)}{1/f_2(x)}$ или $\frac{f_2(x)}{1/f_1(x)}$, что дает неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$. Если же $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = \infty$, то разность $f_1(x) - f_2(x)$ дает неопределенность вида $\infty - \infty$. Но

$$f_1(x) - f_2(x) = f_1(x) \left(1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)} \right).$$

Тогда, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1$, приходим к неопределенности вида $0 \cdot \infty$.

Пример 3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x}$ (неопределенность вида $0 \cdot \infty$).

► Легко находим, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{e^x} = 0. \quad \blacktriangleleft$$

Рассмотрим функцию вида $f(x)^{\varphi(x)}$.

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$, то имеем неопределенность

вида 0^0 .

2. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$, приходим к неопределенности

вида 1^∞ .

3. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$, получаем неопределенность

вида ∞^0 .

Для раскрытия этих неопределенностей применяется метод логарифмирования, который состоит в следующем. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{\varphi(x)} = A$.

Так как логарифмическая функция непрерывна, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln y = \ln \lim_{x \rightarrow x_0} y.$$

Тогда

$$\ln A = \lim_{x \rightarrow x_0} (\varphi(x) \ln f(x))$$

и неопределенности трех рассматриваемых видов сводятся к неопределенности вида $0 \cdot \infty$.

Пример 4. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$.

► Обозначим искомый предел через A . Тогда

$$\begin{aligned} \ln A &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \ln(e^x + x) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + 1)/(e^x + x)}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 2, \quad A = e^2. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

А3-6.6

1. Показать, что функция $f(x) = x - x^3$ на отрезках $[-1; 0]$ и $[0; 1]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля,

и найти соответствующие значения c . (Ответ: $c = \pm 1/\sqrt{3}$.)

2. На дуге параболы $y = x^2$, заключенной между точками $A(1, 1)$ и $B(3, 9)$, найти точку, касательная в которой параллельна хорде AB . (Ответ: $(2, 4)$.)

3. Найти пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 4x + 2}{x^3 - 5x + 4}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}$;

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right); \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \pi x / (2a)},$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}; \quad \text{ж) } \lim_{x \rightarrow \infty} (2/x + 1)^x.$$

(Ответ: а) $7/2$; б) $-1/3$; в) $7/3$; г) $1/2$; д) $e^{2/\pi}$; е) 1 ; ж) e^2 .)

Самостоятельная работа

Найти указанные пределы.

$$1. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 7x}{x \sin 7x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{1/x^2}.$$

(Ответ: а) $7/2$; б) e^{-2} .)

$$2. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{ctg}(\pi x/4)}{x-2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}.$$

(Ответ: а) $-\pi/4$; б) 1 .)

$$3. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{3}{x} \right); \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(1-x)}.$$

(Ответ: а) 3 ; б) e^{-1} .)

6.6. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ И ИХ ГРАФИКОВ

Одной из важнейших прикладных задач дифференциального исчисления является разработка общих приемов исследования поведения функций.

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* в некотором интервале, если большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее (меньшее) значение функции, т. е. при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Перечислим *признаки возрастания (убывания) функции*.

1. Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ возрастает (убывает), то ее производная на этом отрезке неотрицательна (неположительна), т. е. $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

2. Если непрерывная на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемая внутри него функция имеет положительную (отрицательную) производную, то она возрастает (убывает) на этом отрезке.

Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей (невозрастающей)* в некотором интервале, если для любых $x_1 < x_2$ из этого интервала $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Интервалы, в которых функция не убывает или не возрастает, называются *интервалами монотонности функции*. Характер монотонности функции может изменяться только в тех точках ее области определения, в которых меняется знак первой производной. Точки, в которых первая производная функции обращается в нуль или терпит разрыв, называются *критическими*.

Пример 1. Найти интервалы монотонности и критические точки функции $y = 2x^2 - \ln x$.

► Данная функция определена при $x > 0$. Находим ее производную:

$$y' = 4x - 1/x = (4x^2 - 1)/x.$$

В области определения функции $y' = 0$ при $4x^2 - 1 = 0$, т. е. при $x_0 = 1/2$. Найденная точка разбивает область определения функции на интервалы $(0; 1/2)$ и $(1/2; +\infty)$; в первом из них $y' < 0$, а во втором $y' > 0$. Это означает, что в интервале $(0; 0,5)$ данная функция убывает, а в интервале $(0,5; +\infty)$ — возрастает. ◀

Точка x_1 называется *точкой локального максимума функции* $y = f(x)$, если для любых достаточно малых $|\Delta x| \neq 0$ выполняется неравенство $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$. Точка x_2 называется *точкой локального минимума функции* $y = f(x)$, если для любых достаточно малых $|\Delta x| \neq 0$ справедливо неравенство $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$. Точки максимума и минимума называют *точками экстремума функции*, а максимумы и минимумы функции — ее *экстремальными значениями*.

Теорема 1 (необходимый признак локального экстремума). Если функция $y = f(x)$ имеет в точке $x' = x_0$ экстремум, то либо $f'(x_0) = 0$, либо $f'(x_0)$ не существует.

В точках экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику параллельна оси Ox .

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $y = (x + 1)^3$.

► Производная данной функции $y' = 3(x + 1)^2$ в точке $x = -1$ равна нулю. Но в этой точке функция экстремума не имеет, так как $(x + 1)^3 > 0$ при $x > -1$, $(x + 1)^3 < 0$ при $x < -1$, $(x + 1)^3 = 0$ при $x = -1$. Итак, обращение в нуль производной функции не обеспечивает существования экстремума функции. ◀

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $y = |x|$.

► Для данной непрерывной функции имеем: $y(0) = 0$. Так как при $x \neq 0$ $y = |x| > 0$, то $x = 0$ — точка минимума. Но, как было показано в примере 2 из § 6.1, функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$. ◀

Из рассмотренных примеров следует, что не во всякой критической точке функция имеет экстремум. Однако если в какой-либо точке функция достигает экстремума, то эта точка всегда является критической.

Для отыскания экстремумов функции поступают следующим образом: находят все критические точки, а затем исследуют каждую из них (в отдельности) с целью выяснения, будет ли в этой точке максимум или минимум, или же экстремума в ней нет.

Теорема 2 (первый достаточный признак локального экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку $x = x_0$, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0). Если $f'(x)$ при $x < x_0$ положительна, а при $x > x_0$ отрицательна, то при $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет максимум. Если же $f'(x)$ при $x < x_0$ отрицательна, а при $x > x_0$ положительна, то при $x = x_0$ данная функция имеет минимум.

Следует иметь в виду, что указанные неравенства должны выполняться в достаточно малой окрестности критической точки $x = x_0$. Схема исследования функции $y = f(x)$ на экстремум с помощью первой производной может быть записана в виде таблицы (см. табл. 6.1).

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$.

► Данная функция определена и непрерывна для всех $x \in \mathbb{R}$. Найдим ее производную:

$$y' = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} (\sqrt[3]{x} + 1).$$

Критическими точками данной функции будут $x_1 = -1$, в которой $y' = 0$, и $x_2 = 0$, в которой производная y' терпит разрыв. Эти точки

Знаки $f'(x)$ при переходе через критическую точку x_0			Характер критической точки
$x < x_0$	$x = x_0$	$x > x_0$	
+	$f'(x_0) = 0$ или не существует	-	Точка максимума
-	»	+	Точка минимума
+	»	+	
-	»	-	Экстремума нет (функция возрастает)
			Экстремума нет (функция убывает)

разбивают область определения функции на интервалы: $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; +\infty)$, в каждом из которых производная функции сохраняет знак. Поэтому достаточно определить знак производной в произвольной точке каждого из интервалов. Имеем: $y'(-8) = 1 > 0$, т. е.

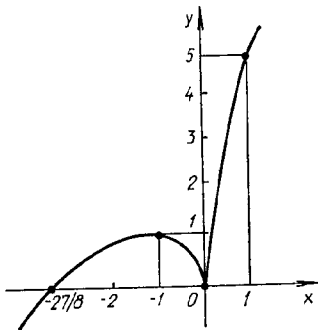


Рис. 6.3

в интервале $(-\infty; -1)$ функция возрастает; $y'(-1/8) = -2 < 0$, следовательно, в интервале $(-1; 0)$ функция убывает; $y'(1) = 3 > 0$, т. е. в интервале $(0; +\infty)$ функция возрастает. Значит, при переходе через точку $x_1 = -1$ в направлении возрастания x знак первой производной изменяется с «+» на «-», т. е. точка $x_1 = -1$ является точкой локального максимума и $y_{\max} = y(-1) = 1$. Для точки $x_2 = 0$ знак первой производной меняется с «-» на «+», а это означает, что точка $x_2 = 0$ является точкой локального минимума и $y_{\min} = y(0) = 0$ (рис. 6.3). ◀

Теорема 3 (второй достаточный признак локального экстремума функции). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема и $f'(x_0) = 0$. Тогда в точке $x = x_0$ функция имеет локальный максимум, если $f''(x_0) < 0$, и локальный минимум, если $f''(x_0) > 0$.

В случае, когда $f''(x_0) = 0$, точка $x = x_0$ может и не быть экстремальной.

Пример 5. С помощью второй производной исследовать на экстремум функцию $y = x^2 e^{-x}$.

► Находим первую и вторую производные:

$$y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x},$$

$$y'' = (2 - 2x)e^{-x} - (2x - x^2)e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}.$$

Так как производная непрерывна при $x \in \mathbb{R}$, то критические точки данной функции удовлетворяют уравнению $2x - x^2 = 0$, откуда $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$. Вычисляем значения второй производной в этих точках: $y''(0) = 2 > 0$, т. е. $x_1 = 0$ — точка минимума; $y''(2) = -2e^{-2} < 0$, т. е. $x_2 = 2$ — точка максимума; $y_{\min} = 0$, $y_{\max} = 4e^{-2}$. ◀

На отрезке $[a; b]$ функция $y = f(x)$ может достигать *наименьшего* ($y_{\text{наим}}$) или *наибольшего* ($y_{\text{наиб}}$) значения либо в критических точках функции, лежащих в интервале $(a; b)$, либо на концах отрезка $[a; b]$.

Пример 6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 3x + 3$ на отрезке $[-2; 3]$.

► Производная данной функции $y' = 3x^2 - 3$. Тогда $y' = 0$ при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Обе эти критические точки принадлежат интервалу $(-2; 3)$. Вычисляем значения функции в критических точках и на концах отрезка: $y(-1) = 5$, $y(1) = 1$, $y(-2) = 1$, $y(3) = 21$. Сравнивая полученные числа, заключаем, что наименьшее значение на отрезке $[-2; 3]$ функция принимает в точках $x_2 = 1$ и $x = a = -2$, а наибольшее значение — в точке $x = b = 3$. Итак, на отрезке $[-2; 3]$ $y_{\text{наим}} = 1$, а $y_{\text{наиб}} = 21$. ◀

Кривая, заданная функцией $y = f(x)$, называется *выпуклой* в интервале $(a; b)$, если все точки кривой лежат не выше любой ее касательной в этом интервале, и *вогнутой* в интервале $(a; b)$, если все ее точки лежат не ниже любой ее касательной в этом интервале.

Точка кривой $M(x_0, f(x_0))$, отделяющая выпуклую ее часть от вогнутой, называется *точкой перегиба кривой*. Предполагается, что в точке M существует касательная.

Теорема 4 (достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции). Если во всех точках интервала $(a; b)$ вторая производная функции $y = f(x)$ отрицательна (положительна), т. е. $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$), то кривая $y = f(x)$ в этом интервале выпукла (вогнута).

В точке перегиба, отделяющей промежутков выпуклости от промежутка вогнутости, вторая производная функции изменяет свой знак, поэтому в таких точках вторая производная функции или обращается в нуль, или не существует.

Теорема 5 (достаточный признак точки перегиба). Если в точке $x = x_0$ $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует и при переходе через эту точку производная $f''(x)$ меняет знак, то точка с абсциссой $x = x_0$ кривой $y = f(x)$ — точка перегиба.

Пример 7. Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = e^{-x^2/2}$ (кривая Гаусса).

► Находим первую и вторую производные:

$$y' = -xe^{-x^2/2}, \quad y'' = e^{-x^2/2}(x^2 - 1).$$

Первая и вторая производные существуют при любых $x \in \mathbb{R}$. Приравняв y'' нулю, находим: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Легко заметить, что в окрестности точки $x_1 = -1$ знак второй производной меняется по следующему закону: $y'' > 0$ при $x < -1$, $y'' < 0$ при $x > -1$. Значит, $M_1(-1, e^{-1/2})$ является точкой перегиба. Слева от этой точки кривая вогнута, так как в интервале $(-\infty; -1)$ $y'' > 0$, а справа в интервале $(-1; 1)$ — выпукла, так как в этом интервале $y'' < 0$.

Далее, $y'' > 0$ при $x > 1$. Следовательно, при $x_2 = 1$ на кривой имеем также точку перегиба $M_2(1, e^{-1/2})$. Слева от точки M_2 в интервале $(-1; 1)$ кривая выпукла, а справа в $(1; +\infty)$ вогнута. Схематический график данной функции изображен на рис. 6.4. ◀

Прямая L называется *асимптотой* данной кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки M кривой до прямой L при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю. Из определения следует, что асимптоты могут существовать только у кривых, имеющих сколь угодно далекие точки («неограниченные» кривые). В примере 7 кривая Гаусса имеет асимптоту $y = 0$ (см. рис. 6.4).

Если существуют числа $x = x_i$ ($i = \overline{1, n}$), при которых $\lim_{x \rightarrow x_i} f(x) =$

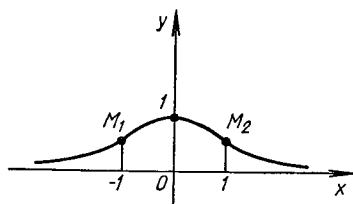


Рис. 6.4

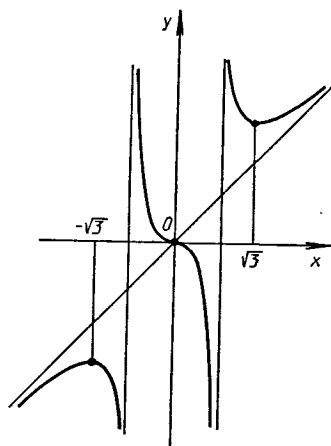


Рис. 6.5

$= \pm \infty$, т. е. функция имеет бесконечные разрывы, то прямые $x = x_i$ называются вертикальными асимптотами кривой $y = f(x)$.

Если существуют пределы

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - kx),$$

то прямые $y = kx + b$ — наклонные асимптоты кривой $y = f(x)$ (при $k = 0$ — горизонтальные). При $x \rightarrow \pm \infty$ можем прийти к двум значениям для k . Если имеем одно значение для k , то при $x \rightarrow \pm \infty$ можем получить два значения для b .

Пример 8. Найти асимптоты кривой $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

► Так как $\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \pm \infty$, то данная кривая имеет две вертикальные асимптоты $x = \pm 1$. Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0.$$

Таким образом, у данной кривой существует одна наклонная асимптота, уравнение которой $y = x$ (рис. 6.5).

А3-6.7

1. Найти интервалы монотонности функции $y = x^4 - 2x^2 - 5$. (Ответ: убывает в $(-\infty; -1)$ и $(0; 1)$, возрастает в $(-1; 0)$ и $(1; +\infty)$.)

2. Найти интервалы монотонности функции $y = x/(x^2 - 6x - 16)$. (Ответ: убывает в $(-\infty; -2)$, $(-2; 8)$, $(8; +\infty)$.)

3. Исследовать на экстремум функцию $y = \sqrt[3]{(x^2 - 6x + 5)^2}$. (Ответ: $y_{\min} = 0$ при $x = 1$ и $x = 5$, $y_{\max} = 2\sqrt[3]{2}$ при $x = 3$.)

4. Исследовать на экстремум функцию $y = x - \ln(1 + x)$. (Ответ: $y_{\min} = 0$ при $x = 0$.)

5. Исследовать на экстремум функцию $y = x \ln^2 x$. (Ответ: $y_{\max} = 4/e^2$ при $x = e^{-2}$, $y_{\min} = 0$ при $x = 1$.)

6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ на отрезке $[-1; 5]$. (Ответ: $y_{\text{наим}} = -6$ при $x = 1$, $y_{\text{наиб}} = 266$ при $x = 5$.)

7. Найти точки перегиба, интервалы вогнутости и выпуклости графика функции $y = \ln(1 + x^2)$. (Ответ: $M_1(1, \ln 2)$, $M_2(-1, \ln 2)$.)

8. Найти асимптоты графика функции $y = x^2/\sqrt{x^2 - 1}$. (Ответ: $x = \pm 1$, $y = \pm x$.)

Самостоятельная работа

1. 1) Исследовать на экстремум функцию $y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$;

2) найти асимптоты кривой $y = x^3/(2(x + 1)^2)$. (Ответ: 1) $y_{\min} = 0$ при $x = \pm 1$, $y_{\max} = 1$ при $x = 0$; 2) $x = -1$, $y = \frac{1}{2}x + 1$.)

2. 1) Найти точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости кривой $y = \operatorname{arctg} x - x$;

2) найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x + 3\sqrt[3]{x}$ на отрезке $[-1; 1]$. (Ответ: 1) $O(0, 0)$, $(-\infty; 0)$ — выпуклая, $(0; +\infty)$ — вогнутая; 2) $y_{\text{наим}} = -4$, $y_{\text{наиб}} = 4$.)

3. 1) Найти интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$;

2) доказать справедливость неравенства $x > \ln(1 + x)$ при $x > 0$. (Ответ: 1) $y_{\max} = 12$ при $x = -1$, $y_{\min} = -20$ при $x = 3$.)

6.7. СХЕМА ПОЛНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

Для полного исследования функции и построения ее графика можно рекомендовать следующую примерную схему:

- 1) указать область определения функции;
- 2) найти точки разрыва функции, точки пересечения ее графика

с осями координат и вертикальные асимптоты (если они существуют);
3) установить наличие или отсутствие четности, нечетности, периодичности функции;

- 4) исследовать функцию на монотонность и экстремум;
- 5) определить интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба;
- 6) найти асимптоты графика функции;
- 7) произвести необходимые дополнительные вычисления;
- 8) построить график функции.

Пример. Провести полное исследование функции $y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$ и построить ее график.

► Воспользуемся рекомендуемой схемой.

1. Данная функция определена для всех $x \in \mathbb{R}$.
2. Функция не имеет точек разрыва и пересекает ось Ox при $x = -3$ и $x = 0$, а ось Oy — при $y = 0$.
3. Функция не является четной, нечетной, периодической.
4. Находим производную функции:

$$f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x(x+3)^2}};$$

$f'(x) = 0$ при $x_1 = -2$ и не существует в точках $x_2 = -3$, $x_3 = 0$. Эти точки разбивают всю область определения функции на интервалы $(-\infty; -3)$, $(-3; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; +\infty)$. Внутри каждого из полученных интервалов сохраняется знак производной, а именно: $f'(x) > 0$ в интервалах $(-\infty; -3)$, $(-3; -2)$, $(0; +\infty)$ и $f'(x) < 0$ в $(-2; 0)$. Это означает, что функция возрастает в интервале $(-\infty; -2)$, убывает в интервале $(-2; 0)$ и возрастает в интервале $(0; +\infty)$. Так как в окрестности точки $x_1 = -2$ знак первой производной при увеличении x изменяется с «+» на «-», то $x_1 = -2$ является точкой максимума, $y_{\max} = \sqrt[3]{4}$. Для точки $x_3 = 0$ знак первой производной изменяется с «-» на «+», т. е. $x_3 = 0$ — точка минимума, $y_{\min} = y(0) = 0$. В точке $x_2 = -3$ функция не имеет экстремума, так как в ее окрестности $f'(x)$ не меняет знака.

5. Находим вторую производную:

$$f''(x) = -\frac{2}{\sqrt[3]{x^4(x+3)^5}},$$

которая не равна нулю для любого конечного x . Поэтому точками перегиба могут быть только те точки кривой, в которых вторая производная не существует, т. е. $x_2 = -3$ и $x_3 = 0$. Определим знак y'' в каждом из интервалов, на которые найденные точки разбивают область определения функции: $f''(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -3)$, кривая вогнута; $f''(x) < 0$ при $x \in (-3; 0)$, кривая выпукла; $f''(x) < 0$ при $x \in (0; +\infty)$, кривая выпукла. Так как в окрестности точки $x_2 = -3$ вторая производная меняет знак, то $M(-3; 0)$ является точкой перегиба. Точка $x_3 = 0$ не является точкой перегиба, так как в ее окрестности знак $f''(x)$ не меняется.

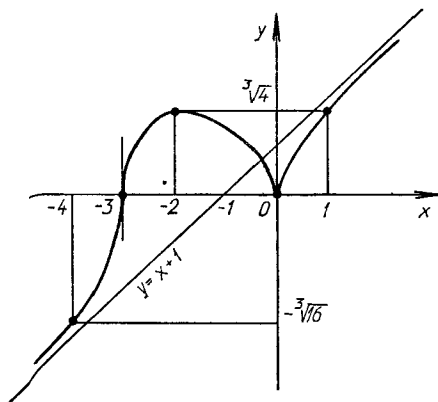
6. Вертикальных асимптот нет, так как данная функция не имеет бесконечных разрывов. График функции имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$, если существуют пределы для k и b , указанные в правиле нахождения наклонной асимптоты. Вычислим их для данной функции:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{(x+3)x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{1 + \frac{3}{x}} = 1,$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (\sqrt[3]{(x+3)x^2} - x) = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{(\sqrt[3]{(x+3)x^2} - x)(\sqrt[3]{(x+3)^2x^4} + x\sqrt[3]{(x+3)x^2} + x^2)}{\sqrt[3]{(x+3)^2x^4} + x\sqrt[3]{(x+3)x^2} + x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{(x+3)x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x+3)^2x^4} + x\sqrt[3]{(x+3)x^2} + x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{3x^2}{\sqrt[3]{(x+3)^2x^4} + x\sqrt[3]{(x+3)x^2} + x^2} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{3}{\sqrt[3]{1+6/x+9/x^2} + \sqrt[3]{1+3/x+1}} = 1.
 \end{aligned}$$

Получили уравнение наклонной асимптоты $y = x + 1$.

7. Прежде чем строить график функции, целесообразно установить угол α , под которым кривая пересекает ось абсцисс в точках $x_2 = -3$ и $x_3 = 0$. В этих точках $y' = \operatorname{tg} \alpha = \infty$ и $\alpha = \pi/2$. Так как в точке $x_3 = 0$ функция достигает нулевого минимума, то ее график не расположен ниже оси Ox в окрестности этой точки. Точка $x_3 = 0$ является *точкой возврата* графика функции.



Р и с. 6.6

8. По результатам исследования строим график функции (рис. 6.6). ◀

А3-6.8

Провести полное исследование указанных функций и построить их графики.

1. $y = x^3 - 3x^2$. (Ответ: $y_{\max} = 0$ при $x = 0$; $y_{\min} = -4$ при $x = 2$; точка перегиба $M_1(1, -2)$.)

2. $y = x^2 + 2/x$. (Ответ: $y_{\min} = 3$ при $x = 1$; точка перегиба $M_1(-\sqrt[3]{2}, 0)$; асимптота $x = 0$.)

3. $y = x^3/(3 - x^2)$. (Ответ: точки разрыва $x = \pm\sqrt{3}$; $y_{\min} = 4,5$ при $x = -3$; $y_{\max} = -4,5$ при $x = 3$; точка перегиба $M_1(0, 0)$; асимптоты $x = \pm\sqrt{3}$ и $y = -x$.)

Самостоятельная работа

Провести полное исследование данных функций и построить их графики.

1. $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$. (Ответ: $y_{\min} = 0$ при $x = -1$; точки перегиба $M_1(-2, \ln 2)$ и $M_2(0, \ln 2)$.)

2. $y = (2x - 1)/(x - 1)^2$. (Ответ: $y_{\min} = -1$ при $x = 0$; точка перегиба $M_1(-1/2, -8/9)$; асимптоты $x = 1$ и $y = 0$.)

3. $y = -\ln(x^2 - 4x + 5)$. (Ответ: $y_{\max} = 0$ при $x = 2$; точки перегиба $M_1(1, \ln 2)$, $M_2(3, \ln 2)$.)

6.8. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ

Пример 1. Каковы должны быть размеры (радиус основания R и высота H) открытого сверху цилиндрического бака максимальной вместимостью, если для его изготовления отпущено $S = 27\pi \approx 84,82$ м² материала?

► Вместимость бака $V = \pi R^2 H$, а на его изготовление пойдет материал площадью $S = \pi R^2 + 2\pi R H$. Отсюда определяем высоту бака

$$H = \frac{S - \pi R^2}{2\pi R}.$$

Тогда вместимость бака

$$V = \pi R^2 \frac{S - \pi R^2}{2\pi R} = \frac{SR - \pi R^3}{2} = V(R).$$

Найдем то значение R , при котором вместимость $V(R)$ будет максимальной (см. § 6.5). Имеем:

$$V' = \frac{1}{2}(S - 3\pi R^2), \quad V' = 0,$$

$$S - 3\pi R^2 = 0, \quad R = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} = \sqrt{\frac{27\pi}{3\pi}} = 3 \text{ м.}$$

Так как $V'' = -3\pi R < 0$, то при найденном значении $R = 3$ вместимость бака будет максимальной.

Высота бака находится из полученного выше соотношения:

$$H = \frac{S - \pi R^2}{2\pi R} = \frac{S - \pi \frac{S}{3\pi}}{2\pi \sqrt{S/(3\pi)}} = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} = 3 \text{ м.} \blacktriangleleft$$

Пример 2. Сечение оросительного канала имеет форму равнобокой трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию (рис. 6.7). При каком угле наклона α боковых сторон этой трапеции сечение канала будет иметь наибольшую площадь?

► Определим площадь сечения канала как функцию угла α , считая, что боковые стороны и меньшее основание трапеции равны a . Тогда, как видно из рис. 6.7,

$$S = \frac{|AB| + |DC|}{2} \cdot |CE| = \frac{2a + 2a \cos \alpha}{2} a \sin \alpha = a^2 \left(\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right).$$

Исследуем S как функцию аргумента α на экстремум. Имеем:

$$S' = a^2 (\cos \alpha + \cos 2\alpha).$$

В критических точках $S' = 0$, т. е.

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha = 0, \quad 2 \cos(3\alpha/2) \cdot \cos(\alpha/2) = 0.$$

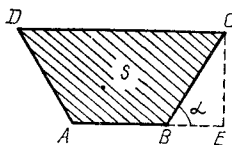
Так как $0 < \alpha < \pi/2$, то $\cos(\alpha/2) \neq 0$. Поэтому, если $\cos(3\alpha/2) = 0$, то $3\alpha/2 = \pi/2$ или $\alpha = \pi/3$.

Докажем, что при $\alpha = \pi/3$ функция S достигает наибольшего значения на отрезке $[0; \pi/2]$. Действительно,

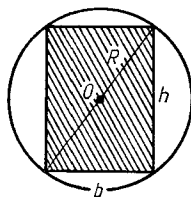
$$S'' = a^2 (-\sin \alpha - 2 \sin 2\alpha), \quad S'' \left(\frac{\pi}{3} \right) = a^2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \right) = -a^2 \frac{3\sqrt{3}}{2} < 0.$$

Поэтому при $\alpha = \pi/3$ имеем локальный максимум $S(\pi/3) = S_{\max} =$

$= \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$, который на отрезке $[0; \pi/2]$ будет также наибольшим значением функции S , поскольку $S(0) = 0$, $S(\pi/2) = a^2 < S_{\max}$. ◀



Р и с. 6.7



Р и с. 6.8

Пример 3. Известно, что прочность бруса с прямоугольным поперечным сечением пропорциональна его ширине b и квадрату высоты h . Найти размеры бруса наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна радиусом $R = 2\sqrt{3}$ дм.

► Прочность бруса $N = kh^2b$, где k — коэффициент пропорциональности, $k > 0$. Из рис. 6.8 видно, что $h^2 + b^2 = 4R^2$, т. е. $h^2 = 4R^2 - b^2$. Тогда

$$N = k(4R^2 - b^2)b.$$

Найдем экстремум функции $N = N(b)$:

$$N' = k(4R^2 - 3b^2).$$

Если $N' = 0$, то $4R^2 - 3b^2 = 0$, откуда $b = 2R/\sqrt{3}$, $b = 4$ дм. Тогда

$$h = \sqrt{4R^2 - b^2} = \sqrt{4R^2 - 4R^2/3} = 2R\sqrt{2/3} = b\sqrt{2},$$

$$h = 4\sqrt{2} \text{ дм.}$$

Так как $N'' = -6kb < 0$, то при найденных значениях b и h прочность бруса будет максимальной. ◀

А3-6.9

1. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак вместимостью $V = 16\pi \approx 50 \text{ м}^3$. Каковы должны быть размеры бака (радиус R и высота H), чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала? (Ответ: $R = 2$ м, $H = 4$ м.)

2. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R . (Ответ: $H = 4R/3$.)

3. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (Ответ: $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$.)

4. Вырезанный из круга сектор с центральным углом α свернут в коническую поверхность. При каком значении угла α объем полученного конуса будет наибольшим? (Ответ: $\alpha = 2\pi\sqrt{2/3} \approx 293^\circ 56'$.)

Самостоятельная работа

1. Через точку $M(1, 4)$ провести прямую так, чтобы сумма величин положительных отрезков, отсекаемых ею на осях координат, была наименьшей. Записать уравнение этой прямой. (Ответ: $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$.)

2. Найти высоту H цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R . (Ответ: $H = 2R/\sqrt{3}$.)

3. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим? (Ответ: $20\sqrt{3}/3$ см.)

6.9. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ДЛИНЫ ДУГИ И КРИВИЗНА ПЛОСКОЙ ЛИНИИ

Дифференциал ds длины дуги s плоской линии, заданной уравнением $y = f(x)$, выражается формулой

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Если линия задана уравнением $x = \varphi(y)$, то

$$ds = \sqrt{1 + (\varphi'(y))^2} dy.$$

В случае параметрического задания линии уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$

$$ds = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Если линия задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, то

$$ds = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi.$$

Пример 1. Найти дифференциал длины дуги циклоиды, заданной уравнениями: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$).

► Имеем: $x' = a(1 - \cos t)$, $y' = a \sin t$. Тогда

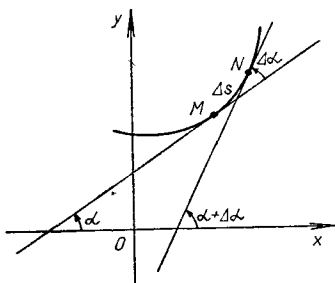
$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \\ &= a \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \\ &= a \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Кривизной K любой плоской линии в точке M называется предел модуля отношения угла между положительными направлениями касательных в точках M и N линии (угла смежности) к длине дуги $MN = \Delta s$, когда $N \rightarrow M$, т. е. по определению

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|,$$

где α — угол наклона касательной в точке M к оси Ox (рис. 6.9).

Радиусом кривизны называется величина R , обратная кривизне K линии, т. е. $R = 1/K$. Например, для окружности $K = 1/R$, где R — радиус окружности; для прямой $K = 0$. Для произвольной линии кривизна, вообще говоря, не является постоянной величиной.



Р и с. 6.9'

Если линия задана уравнением $y = f(x)$, то кривизна в любой ее точке вычисляется по формуле

$$K = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}}.$$

В случае параметрического задания линии уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ для вычисления кривизны применяется формула

$$K = \frac{|y''x' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}},$$

где производные берутся по переменной t .

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, то

$$K = \frac{|\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + (\rho')^2)^{3/2}},$$

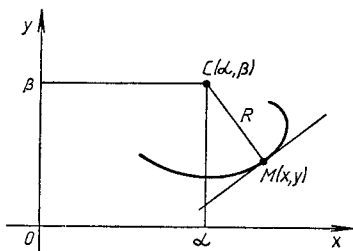
где производные вычисляются по полярному углу φ .

Пример 2. Найти кривизну и радиус кривизны линии $y = x^2$ в точке $M(1, 1)$.

► Вычислим значения первой и второй производных данной функции в точке M : $y' = 2x$, $y'(1) = 2$, $y'' = 2$. Тогда

$$K = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4)^{3/2}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}, \quad R = \frac{1}{K} = \frac{5\sqrt{5}}{2}. \quad \blacktriangleleft$$

Построим в точке $M(x, y)$ нормаль к данной кривой (рис. 6.10), направленную в сторону ее вогнутости, и отложим на этой нормали



Р и с. 6.10

отрезок $|MC|$, равный радиусу кривизны R кривой в точке M . Точка C называется *центром кривизны кривой* в точке M , а круг (окружность) радиусом R с центром в точке C — *кругом (окружностью) кривизны кривой в точке M* .

Координаты α и β центра кривизны кривой для точки $M(x, y)$ вычисляются по формулам:

$$\alpha = x - y' \frac{1 + (y')^2}{y''}, \quad \beta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}. \quad (6.4)$$

Множество всех центров кривизны кривой $y = f(x)$ называют *эволютой*. Формулы (6.4) являются параметрическими уравнениями эволюты с переменной x в качестве параметра. Эволютой любой окружности является ее центр, прямая ее эволюты не имеет.

Пример 3. Записать уравнение окружности кривизны линии $y = x^2 - 6x + 10$ в точке $M_0(3, 1)$.

► Находим значения y' и y'' в точке M_0 : $y' = 2x - 6$, $y'|_{x=3} = 0$, $y'' = 2$. Тогда кривизна кривой в точке M_0 $K = 2$, радиус кривизны $R = 1/2$. По формулам (6.4) находим координаты центра кривизны: $\alpha = 3$, $\beta = 3/2$. Уравнение окружности кривизны имеет вид

$$(x - 3)^2 + (y - 3/2)^2 = 1/4. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 4. Найти уравнение эволюты параболы $y^2 = 2px$.

► Находим первую и вторую производные в произвольной точке $M(x, y)$:

$$2yy' = 2p, \quad y' = \frac{p}{y}, \quad y'' = -\frac{p}{y^2} y' = -\frac{p^2}{y^3}.$$

Тогда из формул (6.4) имеем:

$$\alpha = x - \frac{p}{y} \frac{1 + p^2/y^2}{-p^2/y^3} = 3x + p,$$

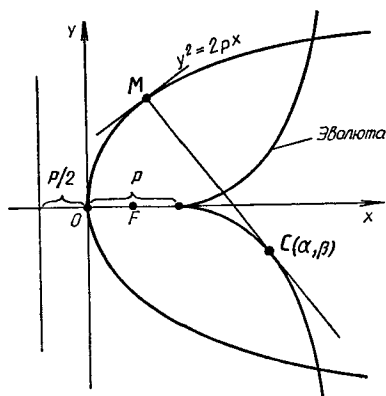
$$\beta = y + \frac{1 + p^2/y^2}{-p^2/y^3} = -\frac{y^3}{p^2} = -\frac{(2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}.$$

Исключим из этих двух уравнений параметр x . В результате получим уравнение эволюты:

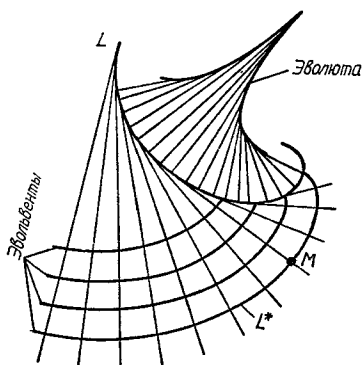
$$\beta^2 = \frac{8}{27p} (\alpha - p)^3,$$

которое определяет полукубическую параболу (рис. 6.11). ◀

Линия L^* , которую описывает фиксированная точка M касательной, катящейся без скольжения по данной линии L , называется *эвольвентой* (*разверткой*) линии L (рис. 6.12). Данная линия L имеет бесчисленное



Р и с. 6.11



Р и с. 6.12

многожество эвольвент, единственную эволюту и всегда является эвольвентой по отношению к своей эволюте.

Пример 5. Составить параметрические уравнения эвольвенты окружности $x^2 + y^2 = r^2$, выходящей из точки $A(r, 0)$.

► Вводя указанным на рис. 6.13 способом параметр t и принимая во внимание, что длина дуги AC равна $|MC| = rt$, легко находим координаты любой точки эвольвенты $M(x, y)$:

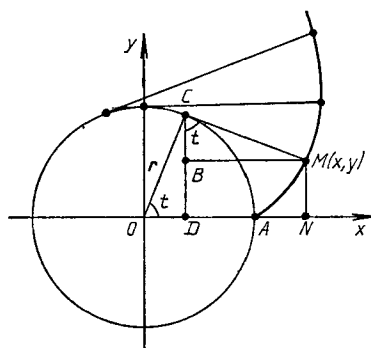
$$x = |ON| = |OD| + |DN| = r \cos t + rt \sin t,$$

$$y = |DB| = |DC| - |BC| = r \sin t - rt \cos t.$$

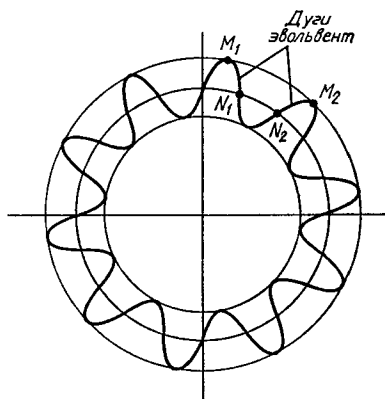
Окончательно имеем:

$$x = r(\cos t + t \sin t), \quad y = r(\sin t - t \cos t). \quad \blacktriangleleft$$

Отметим, что зубья цилиндрических шестерен чаще всего очерчиваются по эвольвенте окружности (рис. 6.14), так как при этом обеспечивается наиболее плавное и бесшумное их зацепление.



Р и с. 6.13



Р и с. 6.14

А3-6.10

1. Найти дифференциал длины дуги кривой, заданной уравнениями $x = at \sin t$, $y = at \cos t$. (Ответ: $ds = 3a \cos t \sin t dt$.)

2. Найти дифференциал длины дуги кривой $y = \sqrt{x^3}$.

3. Найти дифференциал длины дуги кривой $\rho = a(1 + \cos \varphi)$. (Ответ: $ds = a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi$.)

4. Вычислить кривизну и радиус кривизны кривой $x^2 + xy + y^2 = 3$ в точке $A(1, 1)$. (Ответ: $K = 1/(3\sqrt{2})$, $R = 3\sqrt{2}$.)

5. Вычислить кривизну и радиус кривизны кривой $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ в точке $B(3, 2)$. (Ответ: $K = 1/6$, $R = 6$.)

6. Найти центр кривизны и записать уравнение окружности кривизны кривой $y = 1/x$ в точке $A(1, 1)$. (Ответ: $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2$.)

Самостоятельная работа

1. 1) Найти дифференциал длины дуги кривой $y = \operatorname{tg} x$;

2) вычислить кривизну и радиус кривизны кривой $y^2 = x^3$ в точке $M(4, 8)$. (Ответ: $K = 3/40$.)

2. 1) Найти дифференциал длины дуги кривой, заданной уравнениями $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$;

2) найти координаты центра кривизны и записать

уравнение окружности кривизны кривой $y = x^2 - 2x$ в точке $M_0(2, 0)$. (Ответ: $(x + 3)^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = 125/4$.)

3. 1) Найти дифференциал длины дуги кривой $\rho = a(1 + \sin \varphi)$;

2) найти центр кривизны и записать уравнение окружности кривизны кривой $y = \ln x$ в точке $M_1(1, 0)$.
(Ответ: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$.)

6.10. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ К ГЛ. 6

ИДЗ-6.1

Продифференцировать данные функции.

1

$$1.1. y = 2x^5 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x} + 3\sqrt{x}.$$

$$1.2. y = \frac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 4x^3 + \frac{2}{x^4}.$$

$$1.3. y = 3x^4 + \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}.$$

$$1.4. y = 7\sqrt{x} - \frac{2}{x^5} - 3x^3 + \frac{4}{x}.$$

$$1.5. y = 7x + \frac{5}{x^2} - \sqrt[7]{x^4} + \frac{6}{x}.$$

$$1.6. y = 5x^2 - \sqrt[3]{x^4} + \frac{4}{x^3} - \frac{5}{x}.$$

$$1.7. y = 3x^5 - \frac{3}{x} - \sqrt{x^3} + \frac{10}{x^5}.$$

$$1.8. y = \sqrt[3]{x^7} + \frac{3}{x} - 4x^6 + \frac{4}{x^5}.$$

$$1.9. y = 8x^2 + \sqrt[3]{x^4} - \frac{4}{x} - \frac{2}{x^3}.$$

$$1.10. y = 4x^6 + \frac{5}{x} - \sqrt[3]{x^7} - \frac{7}{x^4}.$$

$$1.11. y = 2\sqrt{x^3} - \frac{7}{x} + 3x^2 - \frac{2}{x^5}.$$

$$1.12. y = 4x^3 - \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^2} + \frac{6}{x^2}.$$

$$1.13. y = 5x^3 - \frac{8}{x^2} + 4\sqrt{x} + \frac{1}{x}.$$

$$1.14. y = \frac{9}{x^3} + \sqrt[3]{x^4} - \frac{2}{x} + 5x^4.$$

$$1.15. y = \frac{4}{x^5} - \frac{9}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 7x^3.$$

$$1.16. y = \frac{8}{x^3} + \frac{3}{x} - 4\sqrt{x^3} + 2x^7.$$

$$1.17. y = 5x^2 + \frac{4}{x} - \sqrt[3]{x^7} - 2x^6.$$

$$1.18. y = 10x^2 + 3\sqrt{x^5} - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^4}.$$

$$1.19. y = \sqrt{x^5} - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} - 3x^3.$$

$$1.20. y = 9x^3 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[3]{x^7}.$$

$$1.21. y = 3\sqrt{x} + \frac{4}{x^5} + \sqrt[3]{x^2} - \frac{7}{x}.$$

$$1.22. y = \sqrt{x^3} + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^5} - 5x^3.$$

$$1.23. y = 7x^2 + \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^4} + \frac{8}{x^3}.$$

$$1.24. y = 8x^3 - \frac{4}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[7]{x^2}.$$

$$1.25. y = 8x - \frac{5}{x^4} + \frac{1}{x} - \sqrt[5]{x^4}.$$

$$1.26. y = \sqrt[4]{x^3} - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^5} + 3x.$$

$$1.27. y = 4x^3 + \frac{3}{x} - \sqrt[3]{x^5} - \frac{2}{x^4}.$$

$$1.28. y = 4x^5 - \frac{5}{x} - \sqrt{x^3} + \frac{2}{x^3}.$$

$$1.29. y = \frac{7}{x} + \frac{4}{x^3} - \sqrt[5]{x^3} - 2x^6.$$

$$1.30. y = \frac{6}{x^4} - \frac{3}{x} + 3x^3 - \sqrt{x^7}.$$

2

$$2.1. y = \sqrt[3]{3x^4 + 2x - 5} + \frac{4}{(x-2)^5}.$$

$$2.2. y = \sqrt[3]{(x-3)^4} - \frac{3}{2x^3 - 3x + 1}.$$

- 2.3. $y = \sqrt{(x-4)^5} + \frac{5}{(2x^2 + 4x - 1)^2}$.
- 2.4. $y = \sqrt[5]{7x^2 - 3x + 5} - \frac{5}{(x-1)^3}$.
- 2.5. $y = \sqrt[4]{3x^2 - x + 5} - \frac{3}{(x-5)^4}$.
- 2.6. $y = \sqrt{3x^4 - 2x^3 + x} - \frac{4}{(x+2)^3}$.
- 2.7. $y = \sqrt[3]{(x-7)^5} + \frac{5}{4x^2 + 3x - 5}$.
- 2.8. $y = \sqrt[5]{(x+4)^6} - \frac{2}{2x^2 - 3x + 7}$.
- 2.9. $y = \frac{3}{(x-4)^7} - \sqrt{5x^2 - 4x + 3}$.
- 2.10. $y = \sqrt[3]{4x^2 - 3x - 4} - \frac{2}{(x-3)^5}$.
- 2.11. $y = \frac{7}{(x-1)^3} + \sqrt{8x - 3 + x^2}$.
- 2.12. $y = \sqrt[5]{3x^2 + 4x - 5} + \frac{4}{(x-4)^4}$.
- 2.13. $y = \sqrt[3]{5x^4 - 2x - 1} + \frac{8}{(x-5)^2}$.
- 2.14. $y = \frac{3}{(x+2)^5} - \sqrt[7]{5x - 7x^2 - 3}$.
- 2.15. $y = \sqrt[4]{(x-1)^5} - \frac{4}{7x^2 - 3x + 2}$.
- 2.16. $y = \sqrt[5]{(x-2)^6} - \frac{3}{7x^3 - x^2 - 4}$.
- 2.17. $y = \frac{3}{(x+4)^2} - \sqrt[3]{4 + 3x - x^4}$.
- 2.18. $y = \frac{2}{(x-1)^3} - \frac{8}{6x^2 + 3x - 7}$.
- 2.19. $y = \sqrt{1 + 5x - 2x^2} + \frac{3}{(x-3)^4}$.
- 2.20. $y = \sqrt[3]{5 + 4x - x^2} - \frac{5}{(x+1)^3}$.
- 2.21. $y = \sqrt[4]{5x^2 - 4x + 1} - \frac{7}{(x-5)^2}$.
- 2.22. $y = \sqrt[5]{3 - 7x + x^2} - \frac{4}{(x-7)^5}$.

$$2.23. y = \sqrt{(x-3)^7} + \frac{9}{7x^2 - 5x - 8}.$$

$$2.24. y = \sqrt[3]{(x-8)^4} - \frac{2}{1+3x-4x^2}.$$

$$2.25. y = \frac{3}{4x-3x^2+1} - \sqrt{(x+1)^5}.$$

$$2.26. y = \frac{3}{x-4} + \sqrt[6]{(2x^2-3x+1)^5}.$$

$$2.27. y = \frac{4}{(x-7)^3} - \sqrt[3]{(3x^2-x+1)^4}.$$

$$2.28. y = \sqrt{(x-4)^7} - \frac{10}{(3x^2-5x+1)}.$$

$$2.29. y = \frac{7}{(x+2)^5} - \sqrt{8-5x+2x^2}.$$

$$2.30. y = \sqrt[3]{(x-1)^5} + \frac{5}{2x^2-4x+7}.$$

3

$$3.1. y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x^5. \quad 3.2. y = \cos^5 3x \cdot \operatorname{tg}(4x+1)^3.$$

$$3.3. y = \operatorname{tg}^4 x \cdot \arcsin 4x^5. \quad 3.4. y = \arcsin^3 2x \cdot \operatorname{ctg} 7x^4.$$

$$3.5. y = \operatorname{ctg} 3x \cdot \arccos 3x^2. \quad 3.6. y = \arccos^2 4x \cdot \ln(x-3).$$

$$3.7. y = \ln^5 x \cdot \operatorname{arctg} 7x^4. \quad 3.8. y = \operatorname{arctg}^3 4x \cdot 3^{\sin x}.$$

$$3.9. y = 2^{\cos x} \cdot \operatorname{arctg} 5x^3. \quad 3.10. y = 4^{-x} \cdot \ln^5(x+2).$$

$$3.11. y = 3^{\operatorname{tg} x} \cdot \arcsin 7x^4. \quad 3.12. y = 5^{x^2} \cdot \arccos 2x^5.$$

$$3.13. y = \sin^4 3x \cdot \operatorname{arctg} 2x^3. \quad 3.14. y = \cos^3 4x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}.$$

$$3.15. y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \arcsin x^5. \quad 3.16. y = \operatorname{ctg}^7 x \cdot \arccos 2x^3.$$

$$3.17. y = e^{-\sin x} \operatorname{tg} 7x^6. \quad 3.18. y = e^{\cos x} \operatorname{ctg} 8x^3.$$

$$3.19. y = \cos^5 x \cdot \arccos 4x. \quad 3.20. y = \sin^3 7x \cdot \operatorname{arctg} 5x^2.$$

$$3.21. y = \sin^2 3x \cdot \operatorname{arctg} 3x^5. \quad 3.22. y = \cos^5 \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} x^4.$$

$$3.23. y = \operatorname{tg}^6 2x \cdot \cos 7x^2. \quad 3.24. y = \operatorname{ctg}^3 4x \cdot \arcsin \sqrt{x}.$$

$$3.25. y = \operatorname{ctg} \frac{1}{x} \cdot \arccos x^4. \quad 3.26. y = \operatorname{tg} \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} 3x^5.$$

$$3.27. y = \operatorname{tg}^3 2x \cdot \arccos 2x^3. \quad 3.28. y = 2^{\operatorname{tg} x} \operatorname{arctg}^5 3x.$$

$$3.29. y = \sin^5 3x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}. \quad 3.30. y = \cos^4 3x \cdot \arcsin 3x^2.$$

4

$$4.1. y = \operatorname{arctg}^2 5x \cdot \ln(x-4).$$

$$4.2. y = \operatorname{arctg}^3 2x \cdot \ln(x+5).$$

$$4.3. y = \arccos^4 x \cdot \ln(x^2+x-1).$$

$$4.4. y = \sqrt{\arccos 2x} \cdot 3^{-x}.$$

- 4.5. $y = \operatorname{tg}^4 3x \cdot \operatorname{arctg} 7x^2$.
 4.6. $y = 5^{-x^3} \arcsin 3x^3$.
 4.7. $y = \operatorname{arctg}^5 x \cdot \log_2(x-3)$.
 4.8. $y = \log_3(x+5) \cdot \arccos 3x$.
 4.9. $y = e^{-x} \cdot \arcsin^2 5x$.
 4.10. $y = \log_4(x-1) \cdot \arcsin^4 x$.
 4.11. $y = (x-4)^5 \cdot \operatorname{arctg} 3x^2$.
 4.12. $y = \operatorname{ctg}^3 4x \cdot \operatorname{arctg} 2x^3$.
 4.13. $y = e^{-\cos x} \operatorname{arctg} 7x^5$.
 4.14. $y = (x+1) \arccos 3x^4$.
 4.15. $y = 2^{\sin x} \operatorname{arctg} x^4$.
 4.16. $y = 3^{-x^3} \operatorname{arctg} 2x^5$.
 4.17. $y = 3^{\cos x} \arcsin^2 3x$.
 4.18. $y = \ln(x-10) \cdot \arccos^2 4x$.
 4.19. $y = \lg(x-2) \cdot \arcsin^5 x$.
 4.20. $y = \log_3(x+1) \cdot \operatorname{arctg}^5 7x$.
 4.21. $y = \ln(x+9) \cdot \operatorname{arctg}^3 2x$.
 4.22. $y = \lg(x+2) \cdot \arcsin^2 3x$.
 4.23. $y = 4^{-\sin x} \operatorname{arctg} 3x$.
 4.24. $y = 2^{\cos x} \operatorname{arctg}^3 x$.
 4.25. $y = \lg(x-3) \cdot \arcsin^2 5x$.
 4.26. $y = \log_2(x+3) \cdot \arccos^2 x$.
 4.27. $y = 2^{-x} \operatorname{arctg}^3 4x$.
 4.28. $y = \ln(x-4) \cdot \operatorname{arctg}^4 3x$.
 4.29. $y = \lg(x+3) \cdot \operatorname{arctg}^2 5x$.
 4.30. $y = \log_5(x+1) \cdot \operatorname{arctg}^2 x^3$.

5

- 5.1. $y = \operatorname{tg}^4 3x \cdot \arcsin 2x^3$.
 5.2. $y = (x-2)^4 \arcsin 5x^4$.
 5.3. $y = 2^{-x^3} \operatorname{arctg} 7x^4$.
 5.4. $y = (x+6)^5 \operatorname{arctg} 3x^5$.
 5.5. $y = 3^{\cos x} \ln(x^2 - 3x + 7)$.
 5.6. $y = \log_2(x-7) \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.
 5.7. $y = \arccos^3 5x \cdot \operatorname{tg} x^4$.
 5.8. $y = (x-5)^7 \operatorname{arctg} 7x^3$.
 5.9. $y = \arccos x^2 \cdot \operatorname{ctg} 7x^3$.
 5.10. $y = 5^{-x^2} \arccos 5x^4$.
 5.11. $y = \operatorname{arctg}^4 x \cdot \cos 7x^4$.
 5.12. $y = 4(x-7)^6 \arcsin 3x^5$.
 5.13. $y = (x+5)^2 \arccos^3 5x$.
 5.14. $y = 2^{-\sin x} \arcsin^3 2x$.
 5.15. $y = (x+2)^7 \arccos \sqrt{x}$.
 5.16. $y = (x-7)^5 \arcsin 7x^4$.

- 5.17. $y = \ln(x-3) \cdot \arccos 3x^4$.
 5.18. $y = \log_2(x-4) \cdot \operatorname{arctg}^3 4x$.
 5.19. $y = (x-7)^4 \operatorname{arctg}^2 7x$.
 5.20. $y = \sqrt[3]{x-3} \arccos^4 2x$.
 5.21. $y = \sqrt[3]{x-4} \arcsin^4 5x$.
 5.22. $y = (x-3)^5 \arccos 3x^6$.
 5.23. $y = \sqrt{(x+3)^5} \arcsin 2x^3$.
 5.24. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} \arccos 3x$.
 5.25. $y = \operatorname{tg}^3 x \cdot \operatorname{arctg} 3x$.
 5.26. $y = \sqrt{(x-2)^3} \operatorname{arctg} (7x-1)$.
 5.27. $y = \sqrt[5]{(x+4)^2} \arcsin 7x^2$.
 5.28. $y = \arcsin^3 4x \cdot \operatorname{ctg} 3x$.
 5.29. $y = e^{-\cos x} \arcsin 2x$.
 5.30. $y = \sqrt{(x+5)^3} \arccos^4 x$.

6

- 6.1. $y = (x-3)^4 \arccos 5x^3$. 6.2. $y = (3x-4)^3 \arccos 3x^2$.
 6.3. $y = \operatorname{sh}^3 4x \cdot \arccos \sqrt{x}$. 6.4. $y = \operatorname{th}^2 \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} 3x^2$.
 6.5. $y = \operatorname{cth}^3 5x \cdot \arcsin 3x^2$. 6.6. $y = \operatorname{ch} \frac{1}{x} \cdot \operatorname{arctg} (7x+2)$.
 6.7. $y = \operatorname{ch}^3 4x \cdot \arccos 4x^2$. 6.8. $y = \operatorname{sh}^3 3x \cdot \operatorname{arctg} 5x^2$.
 6.9. $y = \operatorname{th}^5 3x \cdot \arcsin \sqrt{x}$.
 6.10. $y = \operatorname{cth}^2(x+1) \cdot \arccos \frac{1}{x}$.
 6.11. $y = \operatorname{sh}^4 2x \cdot \arccos x^2$.
 6.12. $y = \operatorname{ch}^3(3x+2) \cdot \operatorname{arctg} 3x$.
 6.13. $y = \operatorname{th}^3 4x \cdot \operatorname{arctg} 3x^4$.
 6.14. $y = \operatorname{cth}^4 7x \cdot \arcsin \sqrt{x}$.
 6.15. $y = \operatorname{sh}^3 2x \cdot \arcsin 7x^2$.
 6.16. $y = \operatorname{th}^5 4x \cdot \arccos 3x^4$.
 6.17. $y = \operatorname{ch}^2 5x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.
 6.18. $y = \operatorname{cth}^4 2x \cdot \operatorname{arctg} x^3$.
 6.19. $y = \operatorname{sh}^4 5x \cdot \arccos 3x^2$.
 6.20. $y = \operatorname{ch}^3 9x \cdot \operatorname{arctg} (5x-1)$.
 6.21. $y = \operatorname{th}^4 x \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.
 6.22. $y = \operatorname{cth}^3 4x \cdot \arcsin (3x+1)$.
 6.23. $y = \operatorname{ch}^2 5x \cdot \operatorname{arctg} x^4$.
 6.24. $y = \operatorname{th}^4 7x \cdot \arccos x^3$.

- 6.25. $y = \operatorname{cth} 4x^5 \cdot \arccos 2x$.
 6.26. $y = \operatorname{cth} 3x \cdot \arcsin^4 2x$.
 6.27. $y = \operatorname{th}^5 3x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.
 6.28. $y = \operatorname{sh}^4 3x \cdot \arccos 5x^4$.
 6.29. $y = \operatorname{cth}^2 4x \cdot \arcsin x^3$.
 6.30. $y = \operatorname{th}^3 5x \cdot \operatorname{arctg}(2x - 5)$.

7

- 7.1. $y = \frac{e^{\arccos^2 x}}{\sqrt{x+5}}$.
 7.2. $y = \frac{(x-4)^2}{e^{\operatorname{arctg} x}}$.
 7.3. $y = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2+5x-1}}$.
 7.4. $y = \frac{e^{-\operatorname{ctg} 5x}}{(3x^2-4x+2)}$.
 7.5. $y = \frac{\sqrt{7x^3-5x+2}}{e^{\cos x}}$.
 7.6. $y = \frac{e^{\operatorname{tg} 3x}}{\sqrt{3x^2-x+4}}$.
 7.7. $y = \frac{e^{\sin x}}{(x-5)^7}$.
 7.8. $y = \frac{\sqrt[3]{2x^2-3x+1}}{e^{-x}}$.
 7.9. $y = \frac{\sqrt{x^3+4x-5}}{e^{x^2}}$.
 7.10. $y = \frac{e^{\operatorname{ctg} 5x}}{(x+4)^3}$.
 7.11. $y = \frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{e^x}$.
 7.12. $y = \frac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2-4x-7}}$.
 7.13. $y = \frac{e^{-\sin 2x}}{(x+5)^4}$.
 7.14. $y = \frac{e^{\cos 5x}}{\sqrt{x^2-5x-2}}$.
 7.15. $y = \frac{(2x+5)^3}{e^{\operatorname{tg} x}}$.
 7.16. $y = \frac{e^{-\operatorname{tg} 3x}}{4x^2-3x+5}$.
 7.17. $y = \frac{e^{-\sin 4x}}{(2x-5)^6}$.
 7.18. $y = \frac{3x^2-5x+10}{e^{-x^2}}$.
 7.19. $y = \frac{e^{-x}}{(2x^2-x+4)^2}$.
 7.20. $y = \frac{e^{4x}}{(3x+5)^3}$.
 7.21. $y = \frac{e^{\operatorname{ctg} 5x}}{(3x-5)^4}$.
 7.22. $y = \frac{(2x-3)^7}{e^{-2x}}$.
 7.23. $y = \frac{(3x+1)^4}{e^{4x}}$.
 7.24. $y = \frac{5x^2+4x-2}{e^{-x}}$.
 7.25. $y = \frac{\sqrt{5x^2-x+1}}{e^{3x}}$.
 7.26. $y = \frac{e^{-x^2}}{(2x-5)^7}$.
 7.27. $y = \frac{e^{\cos 3x}}{(2x+4)^5}$.
 7.28. $y = \frac{e^{\sin 5x}}{(3x-2)^2}$.

$$7.29. y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 7}}{e^{-x^2}}.$$

$$7.30. y = \frac{e^{-\lg x}}{4x^2 + 7x - 5}.$$

8

$$8.1. y = \frac{\log_5(3x - 7)}{\operatorname{ctg} 7x^3}.$$

$$8.2. y = \frac{\ln(5x - 3)}{4 \operatorname{tg} 3x^4}.$$

$$8.3. y = \frac{\ln(7x + 2)}{5 \cos 42x}.$$

$$8.4. y = \frac{\sin^3 5x}{\ln(2x - 3)}.$$

$$8.5. y = \frac{\cos^2 3x}{\lg(3x - 4)}.$$

$$8.6. y = \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{\lg(5x + 1)}.$$

$$8.7. y = \frac{\log_3(4x + 5)}{2 \operatorname{ctg} \sqrt{x}}.$$

$$8.8. y = \frac{\ln(7x - 3)}{3 \operatorname{tg}^2 4x}.$$

$$8.9. y = \frac{\lg(11x + 3)}{\cos^2 5x}.$$

$$8.10. y = \frac{\operatorname{ctg}^2 5x}{\ln(7x - 2)}.$$

$$8.11. y = \frac{\operatorname{tg}^2(x - 2)}{\lg(x + 3)}.$$

$$8.12. y = \frac{\sin^3(5x + 1)}{\lg(3x - 2)}.$$

$$8.13. y = \frac{\cos^4(7x - 1)}{\lg(x + 5)}.$$

$$8.14. y = \frac{\sin^3(4x + 3)}{\ln(7x + 1)}.$$

$$8.15. y = \frac{\operatorname{ctg}^3(2x - 3)}{\log_3(x + 2)}.$$

$$8.16. y = \frac{\lg^3 x}{\sin 5x^2}.$$

$$8.17. y = \frac{\ln^2(x + 1)}{\cos 3x^4}.$$

$$8.18. y = \frac{\log_2(7x - 5)}{\operatorname{tg} \sqrt{x}}.$$

$$8.19. y = \frac{\log_3(4x - 2)}{\operatorname{ctg} 2x}.$$

$$8.20. y = \frac{\ln^3(x - 5)}{\operatorname{tg}(1/x)}.$$

$$8.21. y = \frac{\lg(x + 2)}{\sin 2x^5}.$$

$$8.22. y = \frac{\operatorname{tg}^3 7x}{\ln(3x + 2)}.$$

$$8.23. y = \frac{\operatorname{ctg} \sqrt{x - 2}}{\lg(3x + 5)}.$$

$$8.24. y = \frac{\operatorname{tg}(3x - 5)}{\ln^2(x + 3)}.$$

$$8.25. y = \frac{\cos^2 x}{\lg(x^2 - 2x + 1)}.$$

$$8.26. y = \frac{\log_2(3x + 7)}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$8.27. y = \frac{\ln^3 x}{\operatorname{ctg}(x - 3)}.$$

$$8.28. y = \frac{\operatorname{tg}^4 5x}{\ln(x + 7)}.$$

$$8.29. y = \frac{\log_3(x + 4)}{\cos^5 x}.$$

$$8.30. y = \frac{\operatorname{tg}^4 3x}{\lg(x^2 - x + 4)}.$$

9

$$9.1. y = \frac{\operatorname{arctg}^4 5x}{\operatorname{sh} \sqrt{x}}.$$

$$9.2. y = \frac{\operatorname{arctg}^3 2x}{\operatorname{ch}(1/x)}.$$

$$9.3. y = \frac{\operatorname{arccos} 3x^4}{\operatorname{th}^2 x}.$$

$$9.4. y = \frac{\operatorname{arcsin} 5x^3}{\operatorname{ch} \sqrt{x}}.$$

$$9.5. y = \frac{\operatorname{cth}^3(x+1)}{\arccos 2x}.$$

$$9.7. y = \frac{\arccos^7 2x}{\operatorname{th} x^5}.$$

$$9.9. y = \frac{\operatorname{th}^4(2x+5)}{\arccos 3x}.$$

$$9.11. y = \frac{\arcsin^2 4x}{\operatorname{th}(5x-3)}.$$

$$9.13. y = \frac{\arcsin 4x^5}{\operatorname{th}^3 x}.$$

$$9.15. y = \frac{\arccos 4x^3}{\operatorname{sh}^4 x}.$$

$$9.17. y = \frac{\operatorname{th}^3(2x+2)}{\arcsin 5x}.$$

$$9.19. y = \frac{\operatorname{sh}^5 x}{\arccos 4x}.$$

$$9.21. y = \frac{\operatorname{th}^2(x+3)}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}.$$

$$9.23. y = \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{\operatorname{sh}(2x-5)}.$$

$$9.25. y = \frac{\sqrt{\arccos 3x}}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

$$9.27. y = \frac{\operatorname{arctg}^2 5x}{\sqrt[3]{\operatorname{cth} x}}.$$

$$9.29. y = \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^3 x}}{\operatorname{arctg} 5x}.$$

$$9.6. y = \frac{\operatorname{th} 3x^5}{\operatorname{arctg}^2 3x}.$$

$$9.8. y = \frac{\arcsin^3 4x}{\operatorname{sh}(3x+1)}.$$

$$9.10. y = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

$$9.12. y = \frac{\operatorname{ch}^2(4x+2)}{\operatorname{arctg} x^3}.$$

$$9.14. y = \frac{\operatorname{arctg}^3(2x+1)}{\operatorname{ch} \sqrt{x}}.$$

$$9.16. y = \frac{\operatorname{cth}^2(x-2)}{\arccos 3x}.$$

$$9.18. y = \frac{\operatorname{cth}^2(3x-1)}{\arccos x^2}.$$

$$9.20. y = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^3 x}}{\operatorname{arctg} 5x}.$$

$$9.22. y = \frac{\arcsin^2 3x}{\operatorname{ch}(x-5)}.$$

$$9.24. y = \frac{\arccos^3 5x}{\operatorname{th}(x-2)}.$$

$$9.26. y = \frac{\arcsin^2 3x}{\sqrt{\operatorname{th} x}}.$$

$$9.28. y = \frac{\operatorname{arctg}^2 5x}{\operatorname{th}(x+3)}.$$

$$9.30. y = \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ch} 3x}}{\operatorname{arctg}(x+2)}.$$

10

$$10.1. y = \frac{9 \operatorname{arctg}(x+7)}{(x-1)^2}.$$

$$10.3. y = \frac{7 \arccos(4x-1)}{(x+2)^4}.$$

$$10.5. y = \frac{3 \operatorname{arctg}(2x-5)}{(x+1)^4}.$$

$$10.7. y = \frac{4 \arccos 3x}{(x+2)^5}.$$

$$10.2. y = \frac{8 \operatorname{arctg}(2x+3)}{(x+1)^3}.$$

$$10.4. y = \frac{6 \arcsin(x+5)}{(x-2)^5}.$$

$$10.6. y = \frac{2 \operatorname{arctg}(3x+2)}{(x-3)^2}.$$

$$10.8. y = \frac{\arcsin(3x+8)}{(x-7)^3}.$$

- 10.9. $y = \frac{7 \operatorname{arctg}(4x+1)}{(x-4)^2}$. 10.10. $y = \frac{3 \arcsin(2x-7)}{(x+2)^4}$.
- 10.11. $y = \frac{2 \lg(4x+5)}{(x+6)^4}$. 10.12. $y = \frac{5 \ln(5x+7)}{(x-7)^2}$.
- 10.13. $y = \frac{4 \log_3(3x+1)}{(x+1)^2}$. 10.14. $y = \frac{7 \log_4(2x-5)}{(x-1)^5}$.
- 10.15. $y = \frac{\ln(7x+2)}{(x-6)^4}$. 10.16. $y = \frac{4 \lg(3x+7)}{(x+1)^7}$.
- 10.17. $y = \frac{5 \log_2(x^2+1)}{(x-3)^4}$. 10.18. $y = \frac{6 \log_3(2x+9)}{(x+4)^2}$.
- 10.19. $y = \frac{3 \log_2(5x-4)}{(x-3)^5}$. 10.20. $y = \frac{7 \log_5(x^2+x)}{(x+3)^3}$.
- 10.21. $y = \frac{\log_7(2x^2+5)}{(x-4)^2}$. 10.22. $y = \frac{2 \ln(3x-10)}{(x+5)^7}$.
- 10.23. $y = \frac{8 \lg(4x+5)}{(x-1)^5}$. 10.24. $y = \frac{2 \log_3(4x-7)}{(x+3)^4}$.
- 10.25. $y = \frac{3 \log_4(2x+9)}{(x-7)^2}$. 10.26. $y = \frac{\lg(x^2+2x)}{(x+8)^4}$.
- 10.27. $y = \frac{3 \ln(x^2+5)}{(x-7)^3}$. 10.28. $y = \frac{4 \log_2(3x-5)}{(x-2)^2}$.
- 10.29. $y = \frac{2 \ln(2x^2+3)}{(x-7)^4}$. 10.30. $y = \frac{4 \lg(3x+7)}{(x-5)^3}$.

11

- 11.1. $y = \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} \log_2(x-3x^2)$.
- 11.2. $y = \sqrt[3]{\frac{2x-5}{2x+3}} \lg(4x+7)$.
- 11.3. $y = \sqrt[4]{\frac{x+3}{x-3}} \ln(5x^2-2x+1)$.
- 11.4. $y = \sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}} \log_3(x^2+x+4)$.
- 11.5. $y = \sqrt[6]{\frac{7x-4}{7x+4}} \log_5(3x^2+2x)$.
- 11.6. $y = \sqrt[7]{\frac{2x-3}{2x+1}} \lg(7x-10)$.

$$11.7. y = \sqrt[8]{\frac{5x+1}{5x-1}} \ln(3x - x^2).$$

$$11.8. y = \sqrt[9]{\frac{x+3}{x-3}} \log_5(2x - 3).$$

$$11.9. y = \sqrt{\frac{6x+5}{6x-5}} \lg(4x + 7).$$

$$11.10. y = \sqrt[3]{\frac{4x-1}{4x+1}} \ln(2x^3 - 3).$$

$$11.11. y = \sqrt[4]{\frac{x+6}{x-6}} \sin(3x^2 + 1).$$

$$11.12. y = \sqrt[5]{\frac{x-7}{x+7}} \cos(2x^3 + x).$$

$$11.13. y = \sqrt[6]{\frac{x-9}{x+9}} \operatorname{tg}(3x^2 - 4x + 1).$$

$$11.14. y = \sqrt[7]{\frac{x-4}{x+4}} \operatorname{ctg}(2x + 5).$$

$$11.15. y = \sqrt[8]{\frac{x-2}{x+2}} \sin(4x^2 - 7x + 2).$$

$$11.16. y = \sqrt[9]{\frac{x-3}{x+3}} \cos(x^2 - 3x + 2).$$

$$11.17. y = \sqrt{\frac{3x-2}{3x+2}} \operatorname{tg}(2x^2 - 9).$$

$$11.18. y = \sqrt{\frac{2x+3}{2x-3}} \operatorname{ctg}(3x^2 + 5).$$

$$11.19. y = \sqrt[4]{\frac{x+5}{x-5}} \sin(3x^2 - x + 4).$$

$$11.20. y = \sqrt[5]{\frac{x-6}{x+6}} \cos(7x + 2).$$

$$11.21. y = \sqrt[6]{\frac{x-7}{x+7}} \arcsin(2x + 3).$$

$$11.22. y = \sqrt[7]{\frac{x-8}{x+8}} \arccos(3x - 5).$$

$$11.23. y = \sqrt[6]{\frac{x-4}{x+4}} \operatorname{arctg}(5x+1).$$

$$11.24. y = \sqrt[9]{\frac{x-1}{x+1}} \operatorname{arctg}(7x+2).$$

$$11.25. y = \sqrt{\frac{7x-4}{7x+4}} \operatorname{arcsin}(x^2+1).$$

$$11.26. y = \sqrt[3]{\frac{8x-3}{8x+3}} \operatorname{arccos}(x^2-5).$$

$$11.27. y = \sqrt[4]{\frac{2x-5}{2x+5}} \operatorname{arctg}(3x+2).$$

$$11.28. y = \sqrt[5]{\frac{3x-4}{3x+4}} \operatorname{arctg}(2x+5).$$

$$11.29. y = \sqrt[6]{\frac{x^2-1}{x^2+1}} \operatorname{arcsin} 2x.$$

$$11.30. y = \sqrt[7]{\frac{x^2+3}{x^2-3}} \operatorname{arccos} 4x.$$

12

$$12.1. y = (\operatorname{cth} 3x)^{\operatorname{arcsin} x}.$$

$$12.3. y = (\sin 3x)^{\operatorname{arccos} x}.$$

$$12.5. y = (\operatorname{sh}(x+2))^{\operatorname{arcsin} 2x}.$$

$$12.7. y = (\sqrt{3x+2})^{\operatorname{arctg} 3x}.$$

$$12.9. y = (\log_2(x+4))^{\operatorname{ctg} 7x}.$$

$$12.11. y = (\operatorname{ch} 3x)^{\operatorname{ctg} 1/x}.$$

$$12.13. y = (\operatorname{arccos} 5x)^{\ln x}.$$

$$12.15. y = (\ln(x+7))^{\operatorname{ctg} 2x}.$$

$$12.17. y = (\operatorname{th} \sqrt{x+1})^{\operatorname{arctg} 2x}.$$

$$12.19. y = (\cos(x+5))^{\operatorname{arcsin} 3x}.$$

$$12.21. y = (\sin 4x)^{\operatorname{arctg} 1/x}.$$

$$12.23. y = (\operatorname{ctg} 2x^3)^{\sin \sqrt{x}}.$$

$$12.25. y = (\operatorname{arccos} x)^{\sqrt{\cos x}}.$$

$$12.27. y = (\operatorname{sh} 5x)^{\operatorname{arctg}(x+2)}.$$

$$12.29. y = (\operatorname{cth} \sqrt{x})^{\sin(x+3)}.$$

$$12.2. y = (\cos(x+2))^{\ln x}.$$

$$12.4. y = (\operatorname{th} 5x)^{\operatorname{arcsin}(x+1)}.$$

$$12.6. y = (\cos 5x)^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}.$$

$$12.8. y = (\ln(x+3))^{\sin \sqrt{x}}.$$

$$12.10. y = (\operatorname{sh} 3x)^{\operatorname{arctg}(x+2)}.$$

$$12.12. y = (\operatorname{arcsin} 5x)^{\operatorname{tg} \sqrt{x}}.$$

$$12.14. y = (\operatorname{arctg} 2x)^{\sin x}.$$

$$12.16. y = (\operatorname{ctg}(7x+4))^{\sqrt{x+3}}.$$

$$12.18. y = \left(\operatorname{cth} \frac{1}{x}\right)^{\operatorname{arcsin} 7x}.$$

$$12.20. y = (\sqrt{x+5})^{\operatorname{arccos} 3x}.$$

$$12.22. y = (\operatorname{tg} 3x^4)^{\sqrt{x+3}}.$$

$$12.24. y = (\operatorname{tg} 7x^5)^{\sqrt{x+2}}.$$

$$12.26. y = (\operatorname{ctg} 7x)^{\operatorname{sh}(x+3)}.$$

$$12.28. y = (\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{th}(3x+1)}.$$

$$12.30. y = (\operatorname{sh} 3x)^{\operatorname{arctg} 2x}.$$

- 13.1. $y = (\arccos(x+2))^{\lg 3x}$. 13.2. $y = (\arcsin 2x)^{\operatorname{ctg}(x+1)}$.
 13.3. $y = (\operatorname{arctg}(x+7))^{\cos 2x}$. 13.4. $y = (\operatorname{arctg}(x-3))^{\sin 4x}$.
 13.5. $y = (\operatorname{ctg}(3x-2))^{\arcsin 3x}$. 13.6. $y = (\operatorname{tg}(4x-3))^{\arccos 2x}$.
 13.7. $y = (\cos(2x-5))^{\operatorname{arctg} 5x}$. 13.8. $y = (\sin(7x+4))^{\operatorname{arctg} x}$.
 13.9. $y = (\arcsin 2x)^{\ln(x+3)}$. 13.10. $y = (\arccos 3x)^{\lg(5x-1)}$.
 13.11. $y = (\operatorname{arctg} 5x)^{\log_2(x+4)}$. 13.12. $y = (\operatorname{arctg} 7x)^{\lg(x+1)}$.
 13.13. $y = (\log_4(2x+3))^{\arcsin x}$. 13.14. $y = (\log_5(3x+2))^{\arccos x}$.
 13.15. $y = (\lg(7x-5))^{\operatorname{arctg} 2x}$. 13.16. $y = (\ln(5x-4))^{\operatorname{arctg} x}$.
 13.17. $y = (\log_2(6x+5))^{\arcsin 2x}$. 13.18. $y = (\lg(4x-3))^{\arccos 4x}$.
 13.19. $y = (\ln(7x-3))^{\operatorname{arctg} 5x}$. 13.20. $y = (\log_5(2x+5))^{\operatorname{arctg} x}$.
 13.21. $y = (\sin(8x-7))^{\operatorname{cth}(x+3)}$.
 13.22. $y = (\cos(3x+8))^{\operatorname{th}(x-7)}$.
 13.23. $y = (\operatorname{tg}(9x+2))^{\operatorname{ch}(2x-1)}$.
 13.24. $y = (\operatorname{ctg}(7x+5))^{\operatorname{sh} 3x}$.
 13.25. $y = (\operatorname{sh}(3x-7))^{\cos(x+4)}$.
 13.26. $y = (\operatorname{ch}(2x-3))^{\lg(x+5)}$.
 13.27. $y = (\operatorname{th}(7x-5))^{\sin(x+2)}$.
 13.28. $y = (\operatorname{ch}(3x+2))^{\cos(x+4)}$.
 13.29. $y = (\ln(7x+4))^{\lg x}$.
 13.30. $y = (\lg(8x+3))^{\lg 5x}$.

- 14.1. $y = \frac{\sqrt{x+7}(x-3)^4}{(x+2)^5}$. 14.2. $y = \frac{(x-3)^5(x+2)^3}{\sqrt{x-1}^3}$.
 14.3. $y = \frac{(x-2)^3\sqrt{x+1}^5}{(x-4)^2}$. 14.4. $y = \frac{(x+3)^5\sqrt{x-2}^2}{(x+1)^7}$.
 14.5. $y = \frac{(x+2)^7(x-3)^3}{\sqrt{x+1}^5}$. 14.6. $y = \frac{(x-1)^4(x+2)^5}{\sqrt[3]{x-4}^2}$.
 14.7. $y = \frac{(x-3)^2\sqrt{x+4}}{(x+2)^7}$. 14.8. $y = \frac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+3)^5}$.
 14.9. $y = \frac{(x+1)^8(x-3)^2}{\sqrt{x+2}^5}$. 14.10. $y = \frac{(x+2)(x-7)^4}{\sqrt[3]{x-1}^4}$.
 14.11. $y = \frac{\sqrt[3]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$. 14.12. $y = \frac{\sqrt[3]{(x-1)^7}}{(x+1)^5(x-5)^3}$.

$$14.13. y = \frac{\sqrt{(x+2)^3(x-1)^4}}{(x+2)^7}. \quad 14.14. y = \frac{\sqrt[3]{(x-2)^5(x+3)^2}}{(x-7)^3}.$$

$$14.15. y = \frac{\sqrt[4]{x-8}(x+2)^6}{(x-1)^5}. \quad 14.16. y = \frac{\sqrt[5]{x+1}(x-3)^7}{(x+8)^3}.$$

$$14.17. y = \frac{\sqrt[7]{(x-2)^4}}{(x+1)^2(x-6)^5}. \quad 14.18. y = \frac{\sqrt[5]{(x+1)^2}}{(x-3)^4(x-4)^3}.$$

$$14.19. y = \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+3)^7(x-4)^2}. \quad 14.20. y = \frac{\sqrt[3]{(x-2)^4}}{(x-5)(x+1)^7}.$$

$$14.21. y = \frac{(x+4)^3(x-2)^4}{\sqrt[3]{(x-2)^5}}. \quad 14.22. y = \frac{(x-1)^6(x+2)^3}{\sqrt[5]{(x+3)^2}}.$$

$$14.23. y = \frac{(x-1)^4(x-7)^2}{\sqrt[3]{(x+2)^5}}. \quad 14.24. y = \frac{(x+7)^2(x-3)^5}{\sqrt{x^2+3x-1}}.$$

$$14.25. y = \frac{\sqrt[3]{x-3}(x+7)^5}{(x-4)^2}. \quad 14.26. y = \frac{\sqrt{x+10}(x-8)^3}{(x-1)^5}.$$

$$14.27. y = \frac{\sqrt[5]{(x-2)^3}(x-1)}{(x+3)^4}. \quad 14.28. y = \frac{\sqrt[4]{(x+1)^3}(x-2)^5}{(x-3)^2}.$$

$$14.29. y = \frac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{(x+2)^4(x-5)^7}. \quad 14.30. y = \frac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4(x-3)^5}.$$

Решение типового варианта

Продифференцировать данные функции.

1. $y = 9x^5 - 4/x^3 + \sqrt[3]{x^7} - 3x + 4.$

► $y' = 9 \cdot 5x^4 - 4(-3)x^{-4} + \frac{7}{3}x^{4/3} - 3 = 45x^4 + 12/x^4 + \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4} - 3. \blacktriangleleft$

2. $y = \sqrt[4]{(2x^2 - 3x + 1)^3} - 6/(x + 1)^3.$

► $y' = \frac{3}{4}(2x^2 - 3x + 1)^{-1/4}(4x - 3) - 6(-3)(x + 1)^{-4} = \frac{3}{4} \frac{4x - 3}{\sqrt[4]{2x^2 - 3x + 1}} + \frac{18}{(x + 1)^4}. \blacktriangleleft$

3. $y = \operatorname{tg}^5(x + 2) \cdot \arccos 3x^2.$

► $y' = 5 \operatorname{tg}^4(x + 2) \cdot \frac{1}{\cos^2(x + 2)} \arccos 3x^2 + \operatorname{tg}^5(x + 2) \cdot 6x.$

$$+ 2) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-9x^4}} \right) \cdot 6x = \frac{5 \operatorname{tg}^4(x+2) \cdot \arccos 3x^2}{\cos^2(x+2)} -$$

$$- \frac{\operatorname{tg}^5(x+2) \cdot 6x}{\sqrt{1-9x^4}}. \blacktriangleleft$$

4. $y = \arcsin^5 4x \cdot \log_2(x-5)$.

$$\blacktriangleright y' = 5 \arcsin^4 4x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-16x^2}} \cdot 4 \log_2(x-5) +$$

$$+ \arcsin^5 4x \cdot \frac{1}{(x-5) \ln 2} = \frac{20 \arcsin^4 4x \cdot \log_2(x-5)}{\sqrt{1-16x^2}} +$$

$$+ \frac{\arcsin^5 4x}{(x-5) \ln 2}. \blacktriangleleft$$

5. $y = 3^{-x^4} \operatorname{ctg} 7x^3$.

$$\blacktriangleright y' = 3^{-x^4} \ln 3 \cdot (-4x^3) \operatorname{ctg} 7x^3 + 3^{-x^4} \left(\frac{1}{-\sin^2 7x^3} \right) \times$$

$$\times 21x^2 = -4 \ln 3 \cdot 3^{-x^4} x^3 \operatorname{ctg} 7x^3 - \frac{21x^3 \cdot 3^{-x^4}}{\sin^2 7x^3}. \blacktriangleleft$$

6. $y = \operatorname{cth}^2 3x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

$$\blacktriangleright y' = 2 \operatorname{cth} 3x \cdot \left(-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 3x} \right) \cdot 3 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \operatorname{cth}^2 3x \times$$

$$\times \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{6 \operatorname{cth} 3x \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\operatorname{sh}^2 3x} + \frac{\operatorname{cth}^2 3x}{(1+x)2\sqrt{x}}. \blacktriangleleft$$

7. $y = \sqrt{3x^2 - 7x + 5} / e^{-x^4}$.

$$\blacktriangleright y' = (\sqrt{3x^2 - 7x + 5} e^{x^4})' = \frac{(6x-7)e^{x^4}}{2\sqrt{3x^2-7x+5}} +$$

$$+ \sqrt{3x^2 - 7x + 5} \cdot 4x^3 = \frac{(6x-7)e^{x^4}}{2\sqrt{3x^2-7x+5}} +$$

$$+ 4x^3 e^{x^4} \sqrt{3x^2 - 7x + 5}. \blacktriangleleft$$

8. $y = (\lg(x^2 - 3x + 5)) / \operatorname{arctg}^2 5x$.

$$\blacktriangleright y' = \left(\frac{2x-3}{(x^2-3x+5) \ln 10} \operatorname{arctg}^2 5x - \lg(x^2-3x+5) \right) \times$$

$$\times 2 \cdot \operatorname{arctg} 5x \cdot \left(-\frac{1}{1+25x^2} \right) \cdot 5 \cdot \operatorname{arctg}^4 5x =$$

$$= \left(\frac{(2x-3) \operatorname{arctg}^2 5x}{(x^2-3x+5) \ln 10} + \frac{10 \lg(x^2-3x+5) \cdot \operatorname{arctg} 5x}{1+25x^2} \right) \times$$

$$\times \operatorname{arctg}^{-4} 5x. \blacktriangleleft$$

9. $y = \sqrt{\arcsin 3x} / \operatorname{sh}^2 x$.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright y' &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{\arcsin 3x}} \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3 \operatorname{sh}^2 x - 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \sqrt{\arcsin 3x}}{\operatorname{sh}^4 x} = \\ &= \frac{3 \operatorname{sh}^2 x}{2\sqrt{\arcsin 3x} \sqrt{1-9x^2}} - \operatorname{ch} 2x \sqrt{\arcsin 3x} \end{aligned} \blacktriangleleft$$

$$10. y = (3 \ln(x^2 - 5)) / (x + 3)^7.$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright y' &= 3 \frac{\frac{1}{x^2-5} \cdot 2x(x+3)^7 - 7(x+3)^6 \ln(x^2-5)}{(x+3)^{14}} = \\ &= 3 \frac{\frac{2x(x+3)}{x^2-5} - 7 \ln(x^2-5)}{(x+3)^8}. \end{aligned} \blacktriangleleft$$

$$11. y = \sqrt[7]{(x+5)/(x-5)} \operatorname{ctg}(3x-4).$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright y' &= \frac{1}{7} \left(\frac{x+5}{x-5} \right)^{-6/7} \frac{x-5-(x+5)}{(x-5)^2} \operatorname{ctg}(3x-4) - \\ &- \frac{1}{\sin^2(3x-4)} \cdot 3 \sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}} = -\frac{10}{7} \frac{\operatorname{ctg}(3x-4)}{\sqrt[7]{(x+5)^6/(x-5)^6}} - \\ &- \frac{3}{\sin^2(3x-4)} \sqrt[7]{\frac{x+5}{x-5}}. \end{aligned} \blacktriangleleft$$

$$12. y = (\operatorname{th} \sqrt{x+2})^{\ln(3x+2)}.$$

\blacktriangleright Прологарифмируем данную функцию:

$$\ln y = \ln(3x+2) \ln(\operatorname{th} \sqrt{x+2}).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} y' &= \frac{3}{3x+2} \ln(\operatorname{th} \sqrt{x+2}) + \\ &+ \ln(3x+2) \cdot \frac{1}{\operatorname{th} \sqrt{x+2} \operatorname{ch}^2 \sqrt{x+2}} \frac{1}{2\sqrt{x+2}}. \end{aligned}$$

Отсюда выразим y' :

$$\begin{aligned} y' &= (\operatorname{th} \sqrt{x+2})^{\ln(3x+2)} \left(\frac{3 \ln(\operatorname{th} \sqrt{x+2})}{3x+2} + \right. \\ &\left. + \frac{\ln(3x+2)}{2\sqrt{x+2} \operatorname{sh} \sqrt{x+2} \operatorname{ch} \sqrt{x+2}} \right). \end{aligned} \blacktriangleleft$$

$$13. y = (\sin 7x)^{\operatorname{arctg}(3x-5)}.$$

Найдя

$$\ln y = \operatorname{arctg}(3x-5) \cdot \ln(\sin 7x),$$

имеем:

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{1 + (3x - 5)^2} \cdot 3 \ln(\sin 7x) + \operatorname{arctg}(3x - 5) \cdot \frac{1}{\sin 7x} \times \\ \times 7 \cos 7x.$$

Отсюда

$$y' = (\sin 7x)^{\operatorname{arctg}(3x-5)} \left(\frac{3 \ln(\sin 7x)}{1 + (3x-5)^2} + \frac{7 \operatorname{arctg}(3x-5) \cdot \cos 7x}{\sin 7x} \right) \leftarrow$$

$$14. y = \sqrt[7]{(x+5)^6 / ((x-1)^2(x+3))}.$$

► Применяя метод логарифмического дифференцирования (см. § 6.2), последовательно находим:

$$\ln y = \frac{6}{7} \ln(x+5) - 2 \ln(x-1) - 5 \ln(x+3),$$

$$\frac{1}{y} y' = \frac{6}{7(x+5)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3},$$

$$y' = \frac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)^5} \left(\frac{6}{7(x+5)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3} \right). \leftarrow$$

ИДЗ-6.2

1. Найти y' и y'' .

1.1. $y^2 = 8x$.

1.3. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

1.5. $y^2 = 25x - 4$.

1.7. $y^2 - x = \cos y$.

1.9. $\operatorname{tg} y = 3x + 5y$.

1.11. $y = e^y + 4x$.

1.13. $y^2 + x^2 = \sin y$.

1.15. $4 \sin^2(x+y) = x$.

1.17. $\operatorname{tg} y = 4y - 5x$.

1.19. $xy - 6 = \cos y$.

1.21. $y^2 = x + \ln(y/x)$.

1.23. $x^2 y^2 + x = 5y$.

1.25. $\sin y = xy^2 + 5$.

1.27. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{7}$.

1.29. $\sin^2(3x + y^2) = 5$.

2. Найти y' и y'' .

2.1. $\begin{cases} x = (2t + 3) \cos t, \\ y = 3t^3. \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{4t}. \end{cases}$

1.2. $x^2/5 + y^2/7 = 1$.

1.4. $x^2/5 + y^2/3 = 1$.

1.6. $\operatorname{arctg} y = 4x + 5y$.

1.8. $3x + \sin y = 5y$.

1.10. $xy = \operatorname{ctg} y$.

1.12. $\ln y - y/x = 7$.

1.14. $e^y = 4x - 7y$.

1.16. $\sin y = 7x + 3y$.

1.18. $y = 7x - \operatorname{ctg} y$.

1.20. $3y = 7 + xy^3$.

1.22. $xy^2 - y^3 = 4x - 5$.

1.24. $x^4 + x^2 y^2 + y = 4$.

1.26. $x^3 + y^3 = 5x$.

1.28. $y^2 = (x - y)/(x + y)$.

1.30. $\operatorname{ctg}^2(x + y) = 5x$.

2.2. $\begin{cases} x = 2 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} x = 1/(t+2), \\ y = (t/(t+2))^2. \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t}. \end{cases}$

$$2.7. \begin{cases} x = 2t/(1+t^3), \\ y = t^2/(1+t^2). \end{cases}$$

$$2.9. \begin{cases} x = 4t + 2t^2, \\ y = 5t^3 - 3t^2. \end{cases}$$

$$2.11. \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

$$2.13. \begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 4 \sin t. \end{cases}$$

$$2.15. \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$$

$$2.17. \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$$

$$2.19. \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$$

$$2.21. \begin{cases} x = (\ln t)/t, \\ y = t^2 \ln t. \end{cases}$$

$$2.23. \begin{cases} x = 1/(t+1), \\ y = (t/(t+1))^2. \end{cases}$$

$$2.25. \begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{8t}. \end{cases}$$

$$2.27. \begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$$

$$2.29. \begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3t^5. \end{cases}$$

$$2.8. \begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1}, \\ y = (t+1)/\sqrt{t^2 - 1}. \end{cases}$$

$$2.10. \begin{cases} x = (\ln t)/t, \\ y = t \ln t. \end{cases}$$

$$2.12. \begin{cases} x = t^4, \\ y = \ln t. \end{cases}$$

$$2.14. \begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases}$$

$$2.16. \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

$$2.18. \begin{cases} x = 3(\sin t - t \cos t), \\ y = 3(\cos t + t \sin t). \end{cases}$$

$$2.20. \begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = e^{-3t}. \end{cases}$$

$$2.22. \begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

$$2.24. \begin{cases} x = 5 \sin^3 t, \\ y = 3 \cos^3 t. \end{cases}$$

$$2.26. \begin{cases} x = \sqrt[3]{(t-1)^2}, \\ y = \sqrt{t-1}. \end{cases}$$

$$2.28. \begin{cases} x = te^t, \\ y = t/e^t. \end{cases}$$

$$2.30. \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t. \end{cases}$$

3. Для данной функции y и аргумента x_0 вычислить $y'''(x_0)$.

$$3.1. y = \sin^2 x, x_0 = \pi/2.$$

$$3.2. y = \operatorname{arctg} x, x_0 = 1.$$

$$3.3. y = \ln(2+x^2), x_0 = 0.$$

$$3.4. y = e^x \cos x, x_0 = 0.$$

$$3.5. y = e^x \sin 2x, x_0 = 0.$$

$$3.6. y = e^{-x} \cos x, x_0 = 0.$$

$$3.7. y = \sin 2x, x_0 = \pi.$$

$$3.8. y = (2x+1)^5, x_0 = 1.$$

$$3.9. y = \ln(1+x), x_0 = 2.$$

$$3.10. y = \frac{1}{2} x^2 e^x, x_0 = 0.$$

$$3.11. y = \arcsin x, x_0 = 0.$$

$$3.12. y = (5x-4)^5, x_0 = 2.$$

$$3.13. y = x \sin x, x_0 = \pi/2.$$

$$3.14. y = x^2 \ln x, x_0 = 1/3.$$

$$3.15. y = x \sin 2x, x_0 = -\pi/4.$$

$$3.16. y = x \cos 2x, x_0 = \pi/12.$$

$$3.17. y = x^4 \ln x, x_0 = 1.$$

$$3.18. y = x + \operatorname{arctg} x, x_0 = 1.$$

$$3.19. y = \cos^2 x, x_0 = \pi/4.$$

$$3.20. y = \ln(x^2-4), x_0 = 3.$$

$$3.21. y = x^2 \cos x, x_0 = \pi/2.$$

$$3.22. y = x \arccos x, x_0 = \sqrt{3}/2.$$

$$3.23. y = (x + 1) \ln(x + 1), x_0 = -1/2.$$

$$3.24. y = \ln^3 x, x_0 = 1. \quad 3.25. y = 2^{x^2}, x_0 = 1.$$

$$3.26. y = (4x - 3)^5, x_0 = 1.$$

$$3.27. y = x \operatorname{arccotg} x, x_0 = 2. \quad 3.28. y = (7x - 4)^6, x_0 = 1.$$

$$3.29. y = x \sin 2x, x_0 = \pi/4.$$

$$3.30. y = \sin(x^3 + \pi), x_0 = \sqrt[3]{\pi}.$$

4. Записать формулу для производной n -го порядка указанной функции.

$$4.1. y = \ln x.$$

$$4.2. y = 1/x.$$

$$4.3. y = 2^x.$$

$$4.4. y = \cos x.$$

$$4.5. y = \sin x.$$

$$4.6. y = 1/(x + 5).$$

$$4.7. y = e^{-2x}.$$

$$4.8. y = \ln(3 + x).$$

$$4.9. y = \sqrt{x}.$$

$$4.10. y = xe^{3x}.$$

$$4.11. y = 1/(x - 3).$$

$$4.12. y = \ln(5 + x^2).$$

$$4.13. y = e^{4x}.$$

$$4.14. y = 1/(x - 7).$$

$$4.15. y = 5^x.$$

$$4.16. y = e^{-5x}.$$

$$4.17. y = \ln(4 + x).$$

$$4.18. y = 1/(x - 6).$$

$$4.19. y = 10^x.$$

$$4.20. y = 7^x.$$

$$4.21. y = \cos 3x.$$

$$4.22. y = \ln(3x - 5).$$

$$4.23. y = \frac{x}{x + 5}.$$

$$4.24. y = \ln \frac{1}{4 - x}.$$

$$4.25. y = \sqrt{x + 7}.$$

$$4.26. y = xe^{6x}.$$

$$4.27. y = \frac{4}{x + 3}.$$

$$4.28. y = \frac{1 + x}{\sqrt{x}}.$$

$$4.29. y = \frac{1}{1 + x}.$$

$$4.30. y = \ln(5x - 1).$$

5. Решить следующие задачи.

5.1. Записать уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 7x + 3$ в точке с абсциссой $x = 1$.

5.2. Записать уравнение нормали к кривой $y = x^2 - 16x + 7$ в точке с абсциссой $x = 1$.

5.3. Записать уравнение касательной к линии $y = \sqrt{x - 4}$ в точке с абсциссой $x = 8$.

5.4. Записать уравнение нормали к линии $y = \sqrt{x + 4}$ в точке с абсциссой $x = -3$.

5.5. Записать уравнение касательной к кривой $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ в точке $(2, 1)$.

5.6. Записать уравнение нормали к кривой $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ в точке $(1, 1)$.

5.7. Определить угловой коэффициент касательной к кривой $x^2 - y^2 + xy - 11 = 0$ в точке $(3, 2)$.

5.8. В какой точке кривой $y^2 = 4x^3$ касательная перпендикулярна к прямой $x + 3y - 1 = 0$?

5.9. Записать уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 6x + 2$ в точке с абсциссой $x = 2$.

5.10. Записать уравнение касательной к кривой $y = x^2/4 - x + 5$ в точке с абсциссой $x = 4$.

5.11. Записать уравнение нормали к кривой $y = x^4/4 - 27x + 60$ в точке с абсциссой $x = 2$.

5.12. Записать уравнение касательной к кривой $y = -\frac{x^2}{2} + 7x - 15/2$ в точке с абсциссой $x = 3$.

5.13. Записать уравнение нормали к кривой $y = 3 \operatorname{tg} 2x + 1$ в точке с абсциссой $x = \pi/2$.

5.14. Записать уравнение касательной к кривой $y = 4 \operatorname{tg} 3x$ в точке с абсциссой $x = \pi/9$.

5.15. Записать уравнение нормали к кривой $y = 6 \operatorname{tg} 5x$ в точке с абсциссой $x = \pi/20$.

5.16. Записать уравнение касательной к кривой $y = 4 \sin 6x$ в точке с абсциссой $x = \pi/18$.

5.17. Выяснить, в каких точках кривой $y = \sin 2x$ касательная составляет с осью Ox угол $\pi/4$.

5.18. Выяснить, в какой точке кривой $y = 2x^3 - 1$ касательная составляет с осью Ox угол $\pi/3$.

5.19. Выяснить, в какой точке кривой $y = x^3/3 - x^2/2 - 7x + 9$ касательная составляет с осью Ox угол $-\pi/4$.

5.20. Выяснить, в каких точках кривой $y = x^3/3 - 5x^2/2 + 7x + 4$ касательная составляет с осью Ox угол $\pi/4$.

5.21. Найти точки на кривой $y = x^3/3 - 9x^2/2 + 20x - 7$, в которых касательные параллельны оси Ox .

5.22. Найти точку на кривой $y = x^4/4 - 7$, касательная в которой параллельна прямой $y = 8x - 4$.

5.23. Найти точку на кривой $y = -3x^2 + 4x + 7$, касательная в которой перпендикулярна к прямой $x - 20y + 5 = 0$.

5.24. Найти точку на кривой $y = 3x^2 - 4x + 6$, касательная в которой параллельна прямой $8x - y - 5 = 0$.

5.25. Найти точку на кривой $y = 5x^2 - 4x + 1$, касательная в которой перпендикулярна к прямой $x + 6y + 15 = 0$.

5.26. Найти точку на кривой $y = 3x^2 - 5x - 11$, касательная в которой параллельна прямой $x - y + 10 = 0$.

5.27. Найти точку на кривой $y = -x^2 + 7x + 16$, касательная в которой параллельна прямой $y = 3x + 4$.

5.28. Выяснить, в какой точке кривой $y = 4x^2 - 10x + 13$ касательная параллельна прямой $y = 6x - 7$.

5.29. Выяснить, в какой точке кривой $y = 7x^2 - 5x + 4$ касательная перпендикулярна к прямой $23y + x - 1 = 0$.

5.30. Выяснить, в какой точке кривой $y = x^2/4 - 7x + 5$ касательная параллельна прямой $y = 2x + 5$.

6. Решить следующие задачи.

6.1. Траектория движения тела — кубическая парабола $12y = x^3$. В каких ее точках скорости возрастания абсциссы и ординаты одинаковы? (Ответ: (2, 2/3), (-2, -2/3).)

6.2. Закон движения материальной точки $s = 3t^2/4 - 3t + 7$. В какой момент времени скорость ее движения будет равна 2 м/с? (Ответ: 10/3 с.)

6.3. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 4t^2 - 7$ и $x = 3t^2 - 4t + 38$. С какой скоростью эти точки удаляются друг от друга в момент встречи? (Ответ: 40 м/с или 26 м/с.)

6.4. Материальная точка движется по гиперболе $xy = 12$ так, что ее абсцисса x равномерно возрастает со скоростью 1 м/с. С какой скоростью изменяется ордината точки, когда она проходит положение (6, 2)? (Ответ: $-1/3$ м/с.)

6.5. В какой точке параболы $y^2 = 4x$ ордината возрастает вдвое быстрее, чем абсцисса? (Ответ: (1/4, 1).)

6.6. Закон движения материальной точки $s = t^4 - 3t^2 + 2t - 4$. Найти скорость движения точки в момент времени $t = 2$ с. (Ответ: 22 м/с.)

6.7. Закон движения материальной точки $s = 3t^4 - t^3 + 4t^2 + 6$. Найти скорость ее движения в момент времени $t = 2$ с. (Ответ: 100 м/с.)

6.8. Закон движения материальной точки $s = 4 \cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{4}\right) + 6$. Найти ее скорость в момент времени $t = \pi$ с. (Ответ: -1 м/с.)

6.9. Закон движения материальной точки $s = 4 \sin\left(\frac{t}{3} + \frac{\pi}{6}\right) - 8$. Найти ее скорость в момент времени $t = \pi/2$ с. (Ответ: 2/3 м/с.)

6.10. Закон движения материальной точки $s = -3 \cos\left(\frac{t}{4} + \frac{\pi}{12}\right) + 10$. Найти ее скорость в момент времени $t = \pi/3$ с. (Ответ: 3/8 м/с.)

- 6.11. Закон движения материальной точки $s = \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 7$. В какой момент времени ее скорость будет равна 42 м/с? (Ответ: 3 с.)
- 6.12. Закон движения материальной точки $s = 4t^3 - 2t + 11$. В какой момент времени ее скорость будет равна 190 м/с? (Ответ: 4 с.)
- 6.13. Закон движения материальной точки $s = \frac{5}{3}t^3 - 2t + 7$. Найти скорость ее движения в момент времени $t = 4$ с. (Ответ: 78 м/с.)
- 6.14. Закон движения материальной точки $s = 2t^5 - 6t^3 - 58$. Найти скорость ее движения в момент времени $t = 2$ с. (Ответ: 88 м/с.)
- 6.15. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 3t^2 - 8$ и $x = 2t^2 + 5t + 6$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи? (Ответ: 42 м/с, 33 м/с.)
- 6.16. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 5t^2 - t + 6$ и $x = 4t^2 + 18$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи? (Ответ: 39 м/с, 32 м/с.)
- 6.17. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = \frac{4}{3}t^3 - 7t + 16$ и $x = t^3 + 2t^2 + 5t - 8$. В какой момент времени их скорости окажутся равными? (Ответ: 6 с.)
- 6.18. Закон движения материальной точки $s = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 - 11t + 275$. В какой момент времени скорость ее движения будет равна 10 м/с? (Ответ: 7 с.)
- 6.19. Материальная точка движется по гиперболе $xy = 20$ так, что ее абсцисса равномерно возрастает со скоростью 1 м/с. С какой скоростью изменяется ее ордината, когда точка проходит положение (4, 5)? (Ответ: $-1,25$ м/с.)
- 6.20. В какой точке параболы $y^2 = 8x$ ордината возрастает вдвое быстрее, чем абсцисса? (Ответ: (1/2, 2).)
- 6.21. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 5t^2 + 2t + 6$ и $x = 4t^2 + 3t + 18$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи? (Ответ: 42 м/с или 35 м/с.)
- 6.22. В какой точке кривой $y^2 = 16x$ ордината возра-

стает в четыре раза быстрее, чем абсцисса? (Ответ: $(1/4, 2)$.)

6.23. В какой точке параболы $x^2 = 9y$ абсцисса возрастает вдвое быстрее, чем ордината? (Ответ: $(9/4, 9/16)$.)

6.24. В какой точке параболы $x^2 = 10y$ абсцисса возрастает в пять раз быстрее, чем ордината? (Ответ: $(1; 0,1)$.)

6.25. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x = 2t^3 - 2t^2 + 6t - 7$ и $x = \frac{5}{3}t^3 - t^2 + 14t + 4$. В какой момент времени их скорости будут равными? (Ответ: 4 с.)

6.26. Закон движения материальной точки по прямой задан формулой $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 30t + 18$. В какой момент времени скорость точки будет равна нулю? (Ответ: 6 с.)

6.27. Тело движется по прямой Ox по закону $x = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 10t - 16$. Определить скорость и ускорение движения тела. В какие моменты времени оно меняет направление движения? (Ответ: 2 с, 5 с.)

6.28. Зависимость между массой x кг вещества, получаемого в некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x = 7(1 - e^{-4t})$. Определить скорость реакции в случае, когда $t = 0$ с. (Ответ: 28 кг/с.)

6.29. Материальная точка движется прямолинейно так, что $v^2 = 6x$, где v — скорость; x — пройденный путь. Определить ускорение движения точки в момент, когда скорость равна 6 м/с. (Ответ: $1/2$ м/с².)

6.30. Закон движения материальной точки $s = 3t + t^3$. Найти скорость ее движения в момент времени $t = 2$ с. (Ответ: 15 м/с.)

Решение типового варианта

1. Найти y' и y'' , если $x^3y - y^2 = 6x$.

► Имеем равенство $3x^2y + x^3y' - 2yy' = 6$, откуда

$$y' = (6 - 3x^2y)/(x^3 - 2y).$$

Продифференцировав обе части предыдущего равенства, получим

$$6xy + 3x^2y' + 3x^2y' + x^3y'' - 2y'^2 - 2yy'' = 0,$$

откуда

$$y''(x^3 - 2y) = 2y'^2 - 6x^2y' - 6xy,$$

$$y'' = 2 \frac{(6 - 3x^2y)^2}{(x^3 - 2y)^3} - 6x^2 \frac{6 - 3x^2y}{(x^3 - 2y)^2} - \frac{6xy}{x^3 - 2y}. \blacktriangleleft$$

2. Найти y' и y'' , если

$$\left. \begin{aligned} x &= 3t^4 - t^2, \\ y &= t^3 - 5. \end{aligned} \right\}$$

► Так как

$$\left. \begin{aligned} x' &= 12t^3 - 2t, \\ y' &= 3t^2 \end{aligned} \right\} \text{ и } \left. \begin{aligned} x'' &= 36t^2 - 2, \\ y'' &= 6t, \end{aligned} \right\}$$

то

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'}{x'} = \frac{3t^2}{12t^3 - 2t} = \frac{3t}{12t^2 - 2}, \\ y''_x &= \frac{y'_x x' - x'' y'_x}{x'^3} = \frac{6t(12t^3 - 2t) - (36t^2 - 2) \cdot 3t^2}{(12t^3 - 2t)^3} = \\ &= \frac{72t^4 - 12t^2 - 108t^4 + 6t^2}{(12t^3 - 2t)^3} = -\frac{3(6t^2 + 1)}{4t(6t^2 - 1)^3}. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

3. Найти $y'''(\frac{\pi}{4})$, если $y = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cos^2 x$.

► Последовательно находим:

$$y' = \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x = \frac{1}{4} \sin 2x,$$

$$y'' = \frac{1}{2} \cos 2x, \quad y''' = -\sin 2x,$$

$$y'''(\pi/4) = -\sin(\pi/2) = -1. \blacktriangleleft$$

4. Записать формулу для производной n -го порядка, если $y = xe^x$.

► Имеем:

$$y' = e^x + xe^x, \quad y'' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x.$$

$$y''' = 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x.$$

Сравнив полученные выражения для y' , y'' и y''' , запишем:

$$y^{(n)} = ne^x + xe^x. \blacktriangleleft$$

5. Записать уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 9x - 4$ в точке с абсциссой $x = -1$.

► Ордината точки касания $y(-1) = 1 + 9 - 4 = 6$. В любой точке $y' = 2x - 9$. В точке касания $y'(-1) = -11$. Поэтому имеем уравнение касательной (по точке $(-1, 6)$ и угловому коэффициенту -11):

$$y - 6 = -11(x + 1), \quad y = -11x - 5. \blacktriangleleft$$

6. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых $x_1 = \frac{t^3}{3} - 4$ и $x_2 = \frac{7}{2}t^2 - 12t + 3$ (x — в метрах, t — в секундах). В какой момент времени их скорости окажутся равными?

► Находим скорости обеих точек: $x'_1 = t^2$, $x'_2 = 7t - 12$. Так как $x'_1 = x'_2$, то $t^2 = 7t - 12$, $t^2 - 7t + 12 = 0$, $t_1 = 3$ с, $t_2 = 4$ с. ◀

ИДЗ-6.3

Найти указанные пределы, используя правило Лопиталя.

1

$$1.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\ln x} - x}{x - 1}$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4 \sin^2(\pi x/6)}{1 - x^2}$$

$$1.5. \lim_{x \rightarrow a} \arcsin \frac{x-a}{a} \cdot \operatorname{ctg}(x-a)$$

$$1.6. \lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \operatorname{arctg} x) \ln x$$

$$1.7. \lim_{x \rightarrow \infty} (a^{1/x} - 1)x$$

$$1.8. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right)$$

$$1.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 - \sin x^2}$$

$$1.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{2 \sin x + x}$$

$$1.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{1/x^2} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi}$$

$$1.12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$$

$$1.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$$

$$1.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}$$

$$1.15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1 - \sin(\pi x/2)}$$

$$1.16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$$

$$1.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{1 - \cos x}$$

$$1.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(\pi x/2)}$$

$$1.19. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1/\cos^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$$

$$1.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)}$$

$$1.21. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$$

$$1.22. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x$$

$$1.23. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg}(\pi x/2)$$

$$1.24. \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(3/x)$$

$$1.25. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x+1}}{\sqrt{2+x+x}}$$

$$1.27. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sin(\pi x/2)}$$

$$1.29. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$$

$$1.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$$

$$1.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{4x - \sin x}$$

$$1.30. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$$

2

$$2.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg}^2 2x}$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \sin(a/x)$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \cdot \ln(x-1)$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6} \right)$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right)$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg}(x/2)$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$$

$$2.10. \lim_{x \rightarrow \pi/(2a)} \frac{1 - \sin ax}{(2ax - \pi)^2}$$

$$2.11. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}$$

$$2.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1+2x)}$$

$$2.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{c^x - 1}$$

$$2.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x^3}$$

$$2.15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$$

$$2.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$$

$$2.17. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x^n - a^n}$$

$$2.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$$

$$2.19. \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x)$$

$$2.20. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$2.21. \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctg} x$$

$$2.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x \sqrt{1-x^2}}$$

$$2.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{\sin^2 2x}$$

$$2.24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin bx}}$$

$$2.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$$

$$2.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5}$$

$$2.27. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}$$

- 2.28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi/x}{\operatorname{ctg}(5x/2)}$.
 2.29. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 2x) \operatorname{ctg} 4x$.
 2.30. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 \sin b/x)$.

3

- 3.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{5 - 5e^{-3x}}$.
 3.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$.
 3.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$.
 3.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x^2/2 - x - 1}{\cos x - x^2/2 - 1}$.
 3.5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{\operatorname{tg} x - x}$.
 3.6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1-x) + \operatorname{tg}(\pi x/2)}{\operatorname{ctg} \pi x}$.
 3.7. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x \cdot \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$.
 3.8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos(\pi x/2) \cdot \ln(1-x)}$.
 3.9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(e^x - 1)}{\cos x - 1}$.
 3.10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}$.
 3.11. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$.
 3.12. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{a}{6x}$.
 3.13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} 4x - 12 \operatorname{tg} x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}$.
 3.14. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$.
 3.15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$.
 3.16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}$.
 3.17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$.
 3.18. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.
 3.19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.
 3.20. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$.
 3.21. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.
 3.22. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-0.01x}$.
 3.23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + xe^x)}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}$.
 3.24. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\log_2 x}$.
 3.25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{4/x^2} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi}$.
 3.26. $\lim_{x \rightarrow 1/2} \ln 2x \cdot \ln(2x-1)$.
 3.27. $\lim_{x \rightarrow 1/2} \left(\frac{x}{3x-1} - \frac{1}{\ln 3x} \right)$.
 3.28. $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot \operatorname{tg} x$.
 3.29. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 e^{-x})$.
 3.30. $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^{x-1}$.

4

- 4.1. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin 2x)^{\operatorname{ctg} x}$. 4.2. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(1/x))^x$.
- 4.3. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$. 4.4. $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$.
- 4.5. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln 2x)^{1/\ln x}$. 4.6. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$.
- 4.7. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)^{\ln x}$. 4.8. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(x + e))^{1/x}$.
- 4.9. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. 4.10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$.
- 4.11. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$. 4.12. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x)^{\cos(\pi x/2)}$.
- 4.13. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{1/x}$. 4.14. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)}$.
- 4.15. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$. 4.16. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/2)}$.
- 4.17. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$. 4.18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+3}\right)^{3x}$.
- 4.19. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$. 4.20. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{1/x}$.
- 4.21. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{6/(1+2 \ln x)}$. 4.22. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^x)^{1/x}$.
- 4.23. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-1)^{1/\ln(2(x-1))}$. 4.24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{m}{x}\right)^x$.
- 4.25. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} 2x)^{1/\ln x}$. 4.26. $\lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{5}{x^2-x-20}\right)$.
- 4.27. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{a}{x}$.
- 4.28. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right)$.
- 4.29. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\cos(\pi x/2)}$. 4.30. $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

5

- 5.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(2+x) - \ln(x+1))$.
- 5.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{m}{x} + \lambda \sin \frac{m}{x}\right)^x$.
- 5.3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+2x)^{1/x}$. 5.4. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.
- 5.5. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos(m/\sqrt{x}))^x$. 5.6. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{3/x^2}$.

- 5.7. $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln \operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$. 5.8. $\lim_{x \rightarrow a} (2 - x/a)^{\operatorname{tg} (\pi x / (2a))}$.
- 5.9. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{1/\ln(e^x - 1)}$. 5.10. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5}{2 + \sqrt{9 + x}} \right)^{1/\sin x}$.
- 5.11. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 3/x)^x$. 5.12. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$.
- 5.13. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2x - \pi}$. 5.14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right)^x$.
- 5.15. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{1/x^2}$. 5.16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)$.
- 5.17. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos(1/x) + \sin(1/x))^x$.
- 5.18. $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^{e^{1/(x-1)}}$. 5.19. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{1/x^2}$.
- 5.20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2}$. 5.21. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \sqrt{1 - 2x}$.
- 5.22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{2}{x} \right)^x$.
- 5.23. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \cos \sqrt{x}$. 5.24. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$.
- 5.25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + a}{x - a} \right)^x$. 5.26. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$.
- 5.27. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{3/(4 + \ln x)}$. 5.28. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$.
- 5.29. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$. 5.30. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$.

С помощью дифференциала приближенно вычислить данные величины и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой).

6

- 6.1. $\sqrt[5]{34}$. 6.2. $\sqrt[3]{26,19}$.
- 6.3. $\sqrt[4]{16,64}$. 6.4. $\sqrt{8,76}$.
- 6.5. $\sqrt[5]{31}$. 6.6. $\sqrt[3]{70}$.
- 6.7. $(2,01)^3 + (2,01)^2$. 6.8. $\sqrt[3]{65}$.
- 6.9. $2,9/\sqrt{(2,9)^2 + 16}$. 6.10. $\sqrt{\frac{4 - 3,02}{1 + 3,02}}$.
- 6.11. $\sqrt[4]{15,8}$. 6.12. $\sqrt[3]{10}$.
- 6.13. $\sqrt[5]{200}$. 6.14. $(3,03)^5$.

- | | |
|--|-------------------------------|
| 6.15. $\sqrt{\frac{(2,037)^2 - 3}{(2,037)^2 + 5}}$. | 6.16. $\sqrt[7]{130}$. |
| 6.17. $\sqrt[3]{27,5}$. | 6.18. $\sqrt{17}$. |
| 6.19. $\sqrt{640}$. | 6.20. $\sqrt{1,2}$. |
| 6.21. $\sqrt[10]{1025}$. | 6.22. $(3,02)^4 + (3,02)^3$. |
| 6.23. $(5,07)^3$. | 6.24. $(4,01)^{1,5}$. |
| 6.25. $\sqrt[3]{1,02}$. | 6.26. $\cos 151^\circ$. |
| 6.27. $\arctg 1,05$. | 6.28. $\cos 61^\circ$. |
| 6.29. $\tg 44^\circ$. | 6.30. $\arctg 0,98$. |

7

- | | | |
|------------------------------|--------------------------------|-----------------------------|
| 7.1. $\arcsin 0,6$. | 7.2. $\arctg 0,95$. | 7.3. $e^{0,2}$. |
| 7.4. $\lg 11$. | 7.5. $\arcsin 0,54$. | 7.6. $\cos 59^\circ$. |
| 7.7. $e^{2,01}$. | 7.8. $\ln \tg 46^\circ$. | 7.9. $\arctg \sqrt{1,02}$. |
| 7.10. $\arctg \sqrt{0,97}$. | 7.11. $\arctg 1,01$. | 7.12. $\ln(e^2 + 0,2)$. |
| 7.13. $\arctg 1,03$. | 7.14. $\ln \tg 47^\circ 15'$. | 7.15. $\lg 9,5$. |
| 7.16. $\arctg \sqrt{3,1}$. | 7.17. $2^{2,1}$. | 7.18. $4^{1,2}$. |
| 7.19. $\tg 59^\circ$. | 7.20. $\log_2 1,9$. | 7.21. $\arctg \sqrt{3,2}$. |
| 7.22. $\ctg 29^\circ$. | 7.23. $\sin 93^\circ$. | 7.24. $\lg 1,5$. |
| 7.25. $\sin 29^\circ$. | 7.26. $\lg 101$. | 7.27. $\sin 31^\circ$. |
| 7.28. $\lg 0,9$. | 7.29. $e^{0,25}$. | 7.30. $\sqrt{15}$. |

Решение типового варианта

Найти указанные пределы, используя правило Лопиталья.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\sqrt[5]{3x - 1}}$$

► Так как под знаком предела числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности при $x \rightarrow \infty$, то приходим к неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ *. Следовательно, можно применить правило Лопиталья. Имеем:

* При нахождении пределов условимся использовать следующие символические записи. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ при $x \rightarrow x_0$ или $x \rightarrow \pm \infty$ стремятся соответственно к 0 и 0, или к ∞ и ∞ , или к 0 и ∞ , или к 1 и ∞ и т. д., будем писать: $\lim \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{0}{0}$, или $\lim \frac{u}{v} = \frac{\infty}{\infty}$, или $\lim (uv) = 0 \cdot \infty$, или $\lim u^v = 1^\infty$ и т. д.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt[5]{3x-1}} &= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x/(x^2+1)}{3/\sqrt[5]{(3x-1)^4}} = \\
&= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt[5]{(3x-1)^4}}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = \\
&= \frac{2}{3} \frac{\sqrt[5]{(3x-1)^4} + x \cdot \frac{4}{5}(3x-1)^{-1/5} \cdot 3}{2x} = \\
&= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x - 5 + 12x}{10x \sqrt[5]{3x-1}} = \frac{1}{15} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{27x - 5}{x \sqrt[5]{3x-1}} = \\
&= \frac{1}{15} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{27 - 5/x}{\sqrt[5]{3x-1}} = 0. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

2. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

► При $x \rightarrow \pi/2$ получаем неопределённость вида $\frac{0}{0}$.

Применяем правило Лопиталья:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\operatorname{tg}^2 2x} &= \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\cos x}{2 \operatorname{tg} 2x \cdot \frac{2}{\cos^2 2x}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\cos^3 2x \cdot \cos x}{4 \sin 2x} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \pi/2} (-\cos^3 2x) \times \\
\times \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos x}{2 \sin x \cos x} &= \frac{1}{4} \cdot 1 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1}{2 \sin x} = \\
&= \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}. \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{e^{5x} - 1}$.

► Имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$, которую раскрываем с помощью правила Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 4x}{e^{5x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4/(1+16x^2)}{5e^{5x}} \right) = \frac{4}{5}. \blacktriangleleft$$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2 - \sqrt{4+x^2}} - \frac{3}{\sqrt{16+x-4}} \right)$.

► Имеем неопределённость вида $\infty - \infty$. Преобразуем ее к виду $\frac{0}{0}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2 - \sqrt{4+x^2}} - \frac{3}{\sqrt{16+x-4}} \right) &= \infty - \infty = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{16+x-4} - 6 + 3\sqrt{4+x^2}}{(2 - \sqrt{4+x^2})(\sqrt{16+x-4})} = \frac{0}{0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/(2\sqrt{16+x}) + 3x/\sqrt{4+x^2}}{-\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}(\sqrt{16+x-4}) + \frac{1}{2\sqrt{16+x}}(2 - \sqrt{4+x^2})} = \\
&= \frac{1/8}{0} = \infty. \quad \blacktriangleleft
\end{aligned}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x + 3} \right)^x.$$

► Имеем неопределенность вида 1^∞ . Введем обозначение $y = \left(\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x - 3} \right)^x$. Тогда

$$\begin{aligned}
\ln y &= x \ln \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x - 3}, \\
\lim_{x \rightarrow \infty} \ln y &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x - 3}}{1/x} = \frac{0}{0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - x - 3}{x^2 + 3x - 4} \frac{(2x + 3)(x^2 - x - 3) - (2x - 1)(x^2 + 3x - 4)}{(x^2 - x - 3)^2}}{-1/x^2} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left((-x^2(2x^3 - 2x^2 - 6x + 3x^2 - 3x - 9 - 2x^3 - 6x^2 + \right. \\
&\quad \left. + 8x + x^2 + 3x - 4)) / ((x^2 + 3x - 4)(x^2 - x - 3))^{-1} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2(-4x^2 + 2x - 13)}{(x^2 + 3x - 4)(x^2 - x - 3)} = 4.
\end{aligned}$$

Так как

$$\ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x - 3} \right)^x = 4,$$

то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - x - 3} \right)^x = e^4. \quad \blacktriangleleft$$

С помощью дифференциала приближенно вычислить данные величины и оценить допущенную относительную погрешность (с точностью до двух знаков после запятой).

$$6. \sqrt[3]{84}.$$

► Представим данную величину в виде $\sqrt[3]{84} = \sqrt[3]{4^3 + 20}$ и введем функцию $y = \sqrt[3]{x}$, где $x = x_0 + \Delta x$; $x_0 = 64$; $\Delta x = 20$. Воспользуемся формулой $y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + y'(x_0)\Delta x$. Получим:

$$y(x_0) = \sqrt[3]{64} = 4, \quad y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \quad y'(64) = \frac{1}{3 \cdot 16} = \frac{1}{48}.$$

Вычисляем

$$\sqrt[3]{84} \approx 4 + \frac{20}{48} = 4,42.$$

Относительная погрешность

$$\delta = \frac{4,42 - 4,3}{4,42} \cdot 100 \% = 2,7 \%. \blacktriangleleft$$

7. $\operatorname{arctg} 0,98$.

► Воспользуемся той же схемой:

$$y = \operatorname{arctg} x, \quad x_0 = 1, \quad \Delta x = 0,98 - 1 = -0,02,$$

$$y(x_0) = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4,$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}, \quad y'(1) = 0,5, \quad \operatorname{arctg} 0,98 \approx \pi/4 - 0,5 \cdot 0,02 = 0,77,$$

$$\delta = \left| \frac{0,77 - 0,78}{0,77} \right| \cdot 100 \% = 13 \%. \blacktriangleleft$$

ИДЗ-6.4

1. Решить следующие задачи.

1.1. Полотняный шатер объемом V имеет форму прямого конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу его основания, чтобы на шатер пошло наименьшее количество полотна? (Ответ: $\sqrt{2}$.)

1.2. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α вписать параллелограмм наибольшей площадью так, чтобы одна из его сторон лежала на основании, а другая на боковой стороне треугольника. Найти длины сторон параллелограмма. (Ответ: $a/2$ и $a/(4 \cos \alpha)$.)

1.3. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую полную поверхность. (Ответ: $H = 2R$.)

1.4. Требуется сделать коническую воронку с обра-

зующей, равной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наименьшим? (Ответ: $20\sqrt{3}/3$ см.)

1.5. Периметр равнобедренного треугольника равен $2r$. Каково должно быть его основание, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим? (Ответ: $r/2$.)

1.6. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R . (Ответ: $4R/3$.)

1.7. Проволокой, длина которой l м, необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей? (Ответ: $l/4$ м.)

1.8. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в полукруг радиусом a . (Ответ: a^2 .)

1.9. Бревно длиной 20 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны 2 м и 1 м. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна, а объем был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки? (Ответ: длина балки $40/3$ м, сторона поперечного сечения $2\sqrt{2}/3$ м.)

1.10. С корабля, который стоит на якорю в 9 км от берега, нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км от ближайшей к кораблю точки берега. Скорость посыльного при движении пешком — 5 км/ч, а на лодке — 4 км/ч. В каком месте он должен пристать к берегу, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время? (Ответ: в 3 км от лагеря.)

1.11. Полоса жести шириной a , имеющая прямоугольную форму, должна быть согнута в виде открытого кругового цилиндрического желоба так, чтобы его сечение имело форму сегмента. Каким должен быть центральный угол φ , опирающийся на дугу этого сегмента, чтобы вместимость желоба была наибольшей? (Ответ: $\varphi = \pi$.)

1.12. Из круглого бревна диаметром d надо вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина b и высота h этого сечения, чтобы балка, будучи горизонтально расположенной и равномерно нагруженной, имела наименьший прогиб? (Величина прогиба обратно пропорциональна произведению ширины b поперечного сечения и куба высоты h .) (Ответ: $b = d/2$, $h = d\sqrt{3}/2$.)

1.13. Стоимость железнодорожной перевозки груза на l км (AB) равна k_1 р., а автомобильной (PC) — k_2 р.

($k_1 < k_2$). В каком месте P надо начать строительство шоссе, чтобы возможно дешевле доставлять груз из пункта A в C ? Известно, что $|AB| = a$, $|BC| = b$ (рис. 6.15). (Ответ: на расстоянии $a - \frac{k_1 b}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}}$ от точки A .)

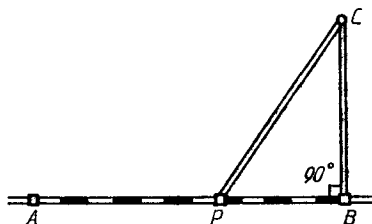


Рис. 6.15

1.14. Человеку нужно добраться из пункта A , находящегося на одном берегу реки, в пункт B на другом ее берегу. Зная, что скорость движения по берегу в k раз больше скорости движения по воде, определить, под каким углом человек должен пересечь реку, чтобы достичь пункта B в кратчайшее время. Ширина реки h , расстояние между пунктами A и B (вдоль берега) равно a . (Ответ: $\max(\arccos(1/k), \arctg(h/a))$.)

1.15. На прямой отрезке AB , соединяющем два источника света: A (силой p) и B (силой q), найти точку M , освещаемую слабее всего, если $|AB| = a$. (Освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.) (Ответ: на расстоянии $\frac{a \sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}}$ от точки A .)

1.16. Лампа висит над центром круглого стола радиусом r . При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на его крае, будет наилучшей? (Освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.) (Ответ: $r/\sqrt{2}$.)

1.17. Из всех цилиндров, вписанных в данный конус, найти тот, у которого боковая поверхность наибольшая. Высота конуса H , радиус основания R . (Ответ: радиус основания цилиндра $R/2$, высота $H/2$.)

1.18. Из бумажного круга вырезан сектор, а из оставшейся его части склеена коническая воронка. Какой угол

должен иметь вырезанный сектор, чтобы объем воронки был наибольшим? (Ответ: $2\pi\sqrt{2/3}$.)

1.19. Из всех конусов с данной боковой поверхностью S найти тот, у которого объем наибольший. (Ответ: радиус

основания конуса $\sqrt{\frac{S}{\pi\sqrt{3}}}$, высота $\sqrt{\frac{S(3\pi-1)}{\pi\sqrt{3}}}$.)

1.20. Пункт B находится на расстоянии 60 км от железной дороги. Расстояние по железной дороге от пункта A до ближайшей к пункту B точки C составляет 285 км. На каком расстоянии от точки C надо построить станцию, от которой проложат шоссе к пункту B , чтобы затрачивать наименьшее время на передвижения между пунктами A и B , если скорость движения по железной дороге равна 52 км/ч, а скорость движения по шоссе — 20 км/ч. (Ответ: 25 км.)

1.21. Канал, ширина которого a м, под прямым углом впадает в другой канал шириной b м. Определить наибольшую длину бревен, которые можно сплавливать по этой системе каналов. (Ответ: $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$ м.)

1.22. Найти высоту прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара радиусом R . (Ответ: $8R$.)

1.23. При каком наклоне боковых сторон равнобедренной трапеции площадь ее будет наибольшей, если боковые стороны равны b , а меньшее основание a . (Ответ: $\cos \varphi = (\sqrt{a^2 + 8b^2} - a)/(4b)$.)

1.24. Из фигуры, ограниченной кривой $y = 3\sqrt{x}$ и прямыми $x = 4$, $y = 0$, вырезать прямоугольник наибольшей площадью. (Ответ: $S = 9,22$.)

1.25. Равнобедренный треугольник, вписанный в окружность радиусом R , вращается вокруг прямой, которая проходит через его вершину параллельно основанию. Какой должна быть высота этого треугольника, чтобы тело, полученное в результате его вращения, имело наибольший объем? (Ответ: $5R/3$.)

1.26. Требуется изготовить открытый цилиндрический бак вместимостью V . Стоимость 1 м² материала, из которого изготавливается дно бака, составляет P_1 р., а стоимость 1 м² материала, идущего на стенки бака, — P_2 р. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материал будут минимальными? (Ответ: P_2/P_1 .)

1.27. Сосуд с вертикальными стенками высотой H , на-

полненный вязкой жидкостью, стоит на горизонтальной плоскости. Определить местоположение отверстия, при котором дальность струи будет наибольшей, если скорость вытекающей жидкости по закону Торричелли равна $\sqrt{2gx}$, где x — расстояние от отверстия до поверхности жидкости; g — ускорение свободного падения. (Ответ: на середине высоты H .)

1.28. Окно имеет форму прямоугольника, завершеного полукругом. Периметр окна равен 15 м. При каком радиусе полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света? (Ответ: 2,1 м.)

1.29. На странице книги печатный текст занимает площадь S ; ширина верхнего и нижнего полей равна a , а правого и левого — b . При каком отношении ширины к высоте текста площадь всей страницы будет наименьшей? (Ответ: b/a .)

1.30. Из круглого бревна, диаметр которого d , требуется вырезать балку прямоугольного поперечного сечения. Каковы должны быть ширина и высота этого сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление на изгиб? Сопротивление балки на изгиб Q пропорционально произведению ширины x ее поперечного сечения и квадрата его высоты y , т. е. $Q = kxy^2$, $k = \text{const}$. (Ответ: $x = d\sqrt{3}/3$, $y = d\sqrt{6}/3$.)

2. Провести полное исследование указанных функций и построить их графики.

$$2.1. y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}.$$

$$2.2. y = \frac{x + 1}{(x - 1)^2}.$$

$$2.3. y = e^{1/(5+x)}.$$

$$2.4. y = x/(9 - x).$$

$$2.5. y = \frac{4x - x^2 - 4}{x}.$$

$$2.6. y = \frac{x^2}{4x^2 - 1}.$$

$$2.7. y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

$$2.8. y = x + \frac{\ln x}{x}.$$

$$2.9. y = x - \ln(1 + x^2).$$

$$2.10. y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}.$$

$$2.11. y = x^2 - 2 \ln x.$$

$$2.12. y = x^3 e^{-x^2/2}.$$

$$2.13. y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}.$$

$$2.14. y = \frac{(x - 2)^2}{x + 1}.$$

$$2.15. y = -\ln \frac{1 + x}{1 - x}.$$

$$2.16. y = \ln(x^2 + 1).$$

2.17. $y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1}$.

2.18. $y = x \ln x$.

2.19. $y = (x - 1)e^{3x+1}$.

2.20. $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$.

2.21. $y = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$.

2.22. $y = \frac{x^5}{x^4 - 1}$.

2.23. $y = (x^3 + 4)/x^2$.

2.24. $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2(x - 5)}$.

2.25. $y = x^3/(x^4 - 1)$.

2.26. $y = (e^{2x} + 1)/e^x$.

2.27. $y = x^2 + 1/x^2$.

2.28. $y = (5x^4 + 3)/x$.

2.29. $y = \frac{4 - 2x}{1 - x^2}$.

2.30. $y = \frac{5x}{4 - x^2}$.

3. Провести полное исследование данных функций и построить их графики.

3.1. $y = e^{2x - x^2}$.

3.2. $y = x + \ln(x^2 - 4)$.

3.3. $y = \frac{2(x + 1)^2}{x - 2}$.

3.4. $y = x \ln^2 x$.

3.5. $y = (4e^{x^2} - 1)/e^{x^2}$.

3.6. $y = x^2 e^{-x^2/2}$.

3.7. $y = xe^{1/x}$.

3.8. $y = \frac{2 + x}{(x + 1)^2}$.

3.9. $y = \frac{(1 - x)^3}{(x - 2)^2}$.

3.10. $y = xe^x$.

3.11. $y = x^2 e^{1/x}$.

3.12. $y = x^2/(x + 2)^2$.

3.13. $y = (x + 2)e^{1-x}$.

3.14. $y = \frac{\ln x}{x}$.

3.15. $y = \left(\frac{x - 2}{x + 1}\right)^2$.

3.16. $y = \frac{x^3}{9 - x^3}$.

3.17. $y = (x + 1)e^{2x}$.

3.18. $y = 4x/(4 + x^2)$.

3.19. $y = x^4/(x^3 - 1)$.

3.20. $y = \ln(x^2 - 2x + 6)$.

3.21. $y = \ln(1 - 1/x^2)$.

3.22. $y = x^3 e^{x+1}$.

3.23. $y = x - \ln(1 + x^2)$.

3.24. $y = 1 - \ln^3 x$.

3.25. $y = (x - 1)e^{4x+2}$.

3.26. $y = \frac{2x^2 + 2 + 4x}{2 - x}$.

3.27. $y = -x \ln^2 x$.

3.28. $y = x^2 - 2 \ln x$.

3.29. $y = e^{1/(2-x)}$.

3.30. $y = \ln(4 - x^2)$.

4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

4.1. $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$, $[0; 3]$.

4.2. $y = 3x/(x^2 + 1)$, $[0; 5]$.

4.3. $y = (2x - 1)/(x - 1)^2$, $[-1/2; 0]$.

- 4.4. $y = (x + 2)e^{1-x}$, $[-2; 2]$.
 4.5. $y = \ln(x^2 - 2x + 4)$, $[-1; 3/2]$.
 4.6. $y = x^3/(x^2 - x + 1)$, $[-1; 1]$.
 4.7. $y = ((x + 1)/x)^3$, $[1; 2]$.
 4.8. $y = \sqrt{x - x^3}$, $[-2; 2]$.
 4.9. $y = 4 - e^{-x^2}$, $[0; 1]$.
 4.10. $y = (x^3 + 4)/x^2$, $[1; 2]$.
 4.11. $y = xe^x$, $[-2; 0]$.
 4.12. $y = (x - 2)e^x$, $[-2; 1]$.
 4.13. $y = (x - 1)e^{-x}$, $[0; 3]$.
 4.14. $y = x/(9 - x^2)$, $[-2; 2]$.
 4.15. $y = (1 + \ln x)/x$, $[1/e; e]$.
 4.16. $y = e^{4x-x^2}$, $[1; 3]$.
 4.17. $y = (x^5 - 8)/x^4$, $[-3; -1]$.
 4.18. $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$, $[-1; 2]$.
 4.19. $y = x \ln x$, $[1/e^2; 1]$.
 4.20. $y = x^3 e^{x+1}$, $[-4; 0]$.
 4.21. $y = x^2 - 2x + 2/(x - 1)$, $[-1; 3]$.
 4.22. $y = (x + 1)\sqrt[3]{x^2}$, $[-4/5; 3]$.
 4.23. $y = e^{6x-x^2}$, $[-3; 3]$.
 4.24. $y = (\ln x)/x$, $[1; 4]$.
 4.25. $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$, $[-3; 1]$.
 4.26. $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$, $[-1; 2]$.
 4.27. $y = (3 - x)e^{-x}$, $[0; 5]$.
 4.28. $y = \sqrt{3/2 + \cos x}$, $[0; \pi/2]$.
 4.29. $y = 108x - x^4$, $[-1; 4]$.
 4.30. $y = x^4/4 - 6x^3 + 7$, $[16; 20]$.

Решение типового варианта

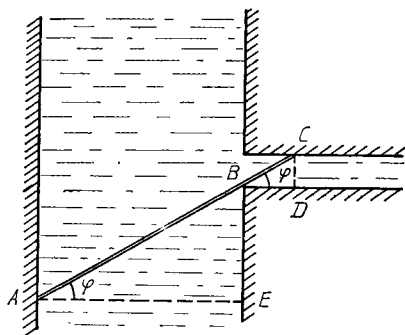
1. От канала шириной 32 м отходит под прямым углом другой канал шириной 4 м. Определить наибольшую длину бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов. (Толщину бревна не учитывать.)

► Обозначим длину бревна через l . Тогда:

$$l = |AC| = |AB| + |BC|, \quad |AB| = \frac{|AE|}{\cos \varphi} = \frac{32}{\cos \varphi},$$

$$|BC| = \frac{|CD|}{\sin \varphi} = \frac{4}{\sin \varphi}, \quad l = \frac{32}{\cos \varphi} + \frac{4}{\sin \varphi}$$

(рис. 6.16).



Р и с. 6.16

Исследуем функцию l на экстремум:

$$l' = \frac{dl}{d\varphi} = \frac{32}{\cos^2 \varphi} \sin \varphi - \frac{4}{\sin^2 \varphi} \cos \varphi = \frac{32 \sin^3 \varphi - 4 \cos^3 \varphi}{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}.$$

Если $l' = 0$, то $32 \sin^3 \varphi - 4 \cos^3 \varphi = 0$. Так как $\cos \varphi \neq 0$, то из последнего уравнения имеем: $\operatorname{tg}^3 \varphi = 1/8$, $\operatorname{tg} \varphi = 1/2$, $\sin \varphi = 1/\sqrt{5}$, $\cos \varphi = 2/\sqrt{5}$, $\varphi \approx 26^\circ 34'$. В окрестности этого значения φ знак производной l' определяется знаком ее числителя, т. е. выражения $u(\varphi) = 32 \sin^3 \varphi - 4 \cos^3 \varphi$. Имеем:

$$u(\varphi)|_{\varphi=26^\circ} \approx 32 \cdot 0,438^3 - 4 \cdot 0,899^3 \approx 2,696 - 2,904 < 0,$$

$$u(\varphi)|_{\varphi=27^\circ} \approx 32 \cdot 0,454^3 - 4 \cdot 0,891^3 \approx 2,994 - 2,829 > 0,$$

т. е.

$$l(\varphi)|_{\varphi=26^\circ 34'} = l_{\max}.$$

Следовательно, при $\varphi \approx 26^\circ 34'$ расстояние $|AC|$ будет минимальным, поэтому наибольшая длина l_{\max} бревна, сплавляемого из одного канала в другой, не может быть больше этого расстояния. Окончательно получаем:

$$l_{\max} = 20\sqrt{5} \approx 44,72 \text{ м.} \quad \blacktriangleleft$$

2. Провести полное исследование функции $y = (x + 3)^2 / (x - 4)$ и построить ее график.

► Исследуем данную функцию, придерживаясь в основном схемы, предложенной в § 6.7.

1. Областью определения функции является множество $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

2. Ордината точки графика $y > 0$ при $x > 4$, $y < 0$ при $x < 4$.

3. Точки пересечения графика данной функции с осями координат: $(0, -9/4)$ и $(-3, 0)$.

4. Легко находим, что $x = 4$ — вертикальная асимптота, причем:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4-0} y &= \lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{(x+3)^2}{x-4} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4+0} y = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{(x+3)^2}{x-4} = +\infty.\end{aligned}$$

Находим наклонные асимптоты:

$$\begin{aligned}k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+3)^2}{x(x-4)} = 1, \\ b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{(x+3)^2}{x-4} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 6x + 9 - x^2 + 4x}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{10x + 9}{x-4} = 10.\end{aligned}$$

Таким образом, существует единственная наклонная асимптота $y = x + 10$.

5. Исследуем функцию на возрастание, убывание, локальный экстремум:

$$\begin{aligned}y' &= \frac{2(x+3)(x-4) - (x+3)^2}{(x-4)^2} = \frac{2x^2 - 2x - 24 - x^2 - 6x - 9}{(x-4)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 8x - 33}{(x-4)^2}.\end{aligned}$$

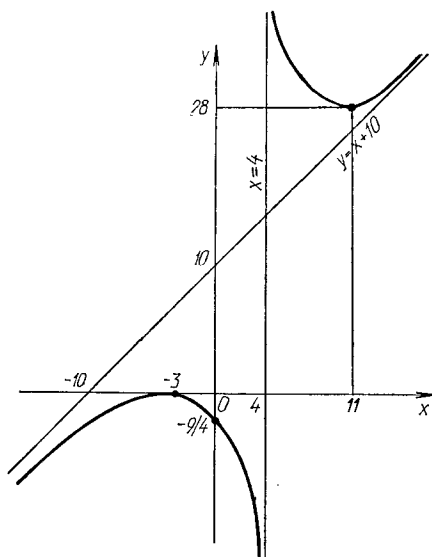
Из $y' = 0$ следует $x^2 - 8x - 33 = 0$, откуда $x_1 = 11$, $x_2 = -3$. В интервале $(-\infty; -3)$ $y' > 0$, следовательно, функция возрастает в этом интервале; в $(-3; 4)$ $y' < 0$, т. е. функция убывает. Поэтому функция в точке $x = -3$ имеет локальный максимум: $y(-3) = 0$. В интервале $(4; 11)$ $y' < 0$, следовательно, функция убывает на этом интервале; в $(11; +\infty)$ $y' > 0$, т. е. функция возрастает. В точке $x = 11$ имеем локальный минимум: $y(11) = 28$.

6. Исследуем график функции на выпуклость, вогнутость и определим точки перегиба. Для этого найдем

$$\begin{aligned}y'' &= \frac{(2x-8)(x-4)^2 - (x^2-8x-33) \cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} = \\ &= \frac{2x^2 - 8x - 8x + 32 - 2x^2 + 16x + 66}{(x-4)^3} = \frac{98}{(x-4)^3}.\end{aligned}$$

Очевидно, что в интервале $(-\infty; 4)$ $y'' < 0$, и в этом интервале кривая выпукла; в $(4; +\infty)$ $y'' > 0$, т. е. в этом интервале кривая вогнута. Так как при $x = 4$ функция не определена, то точка перегиба отсутствует.

7. График функции изображен на рис. 6.17. ◀



Р и с. 6.17

3. Провести полное исследование функции $y = xe^{-x^2/2}$ и построить ее график.

► Воспользуемся общей схемой исследования функции.

1. Область определения функции $(-\infty; +\infty)$.

2. Так как $y = 0$ при $x = 0$, то график функции проходит через начало координат.

3. Функция принимает положительные значения в интервале $(0; +\infty)$ и отрицательные в интервале $(-\infty; 0)$.

4. Вертикальных асимптот нет. Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{e^{x^2/2}} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2/2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{e^{x^2/2}} = 0.$$

Получаем горизонтальную асимптоту $y = 0$.

5. Так как $y(-x) = -x/e^{x^2/2} = -y(x)$, то функция нечетна и ее график симметричен относительно начала координат.

6. Исследуем функцию на монотонность:

$$y' = \frac{e^{x^2/2} - xxe^{x^2/2}}{e^{x^2}} = \frac{e^{x^2/2}(1 - x^2)}{e^{x^2}}.$$

Если $y' = 0$, то $1 - x^2 = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Эти точки разбивают числовую ось на три интервала: в $(-\infty; -1)$ $y' < 0$, и функция в этом интервале убывает; в $(-1; 1)$ $y' > 0$ и функция возрастает; в $(1; +\infty)$ $y' < 0$, и функция в этом интервале убывает. В точке $x = -1$ имеем минимум:

$$y(-1) = -\frac{1}{e^{1/2}} \approx -0,6,$$

а в точке $x = 1$ — максимум:

$$y(1) = \frac{1}{e^{1/2}} \approx 0,6.$$

7. Исследуем свойства функции, связанные со второй производной:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1-x^2}{e^{x^2/2}}, \quad y'' = \frac{-2xe^{x^2/2} - (1-x^2)xe^{x^2/2}}{e^{x^2}} = \\ &= \frac{xe^{x^2/2}(-2-1+x^2)}{e^{x^2}} = \frac{x(x^2-3)}{e^{x^2/2}}. \end{aligned}$$

Если $y'' = 0$, то $x(x^2 - 3) = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$. В интервале $(-\infty; -\sqrt{3})$ $y'' < 0$, т. е. кривая выпукла в этом интервале; в $(-\sqrt{3}; 0)$ $y'' > 0$, т. е. кривая вогнута; в $(0; \sqrt{3})$ $y'' < 0$, кривая выпукла; в $(\sqrt{3}; +\infty)$ $y'' > 0$, кривая вогнута. Так как в точках $x = \pm\sqrt{3}$, $x = 0$ вторая производная y'' меняет знак, то при этих значениях x на графике функции получаем точки перегиба, ординаты которых:

$$y(\pm\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}/e^{3/2} \approx \pm 0,4, \quad y(0) = 0.$$

8. Полученные данные позволяют построить график функции (рис. 6.18).

4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2 \sin x + \cos 2x$ на отрезке $[0; \pi/2]$.

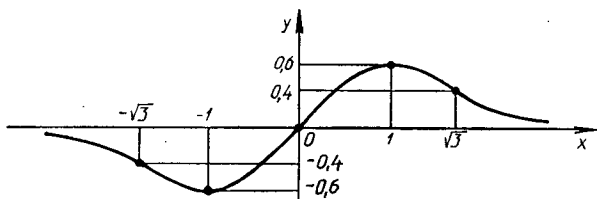
► Находим критические точки:

$$y' = 2 \cos x - 2 \sin 2x,$$

Если $y' = 0$, то

$$2 \cos x - 4 \sin x \cos x = 0, \quad 2 \cos x (1 - 2 \sin x) = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то $x = \pi/2 + 2k\pi$; если же $\sin x = 1/2$, то $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in \mathbf{Z}$.



Р и с. 6.18

Из всех найденных критических точек только $x = \pi/6$ и $x = \pi/2$ принадлежат отрезку $[0; \pi/2]$. Вычислим значения данной функции при $x = 0$, $x = \pi/6$, $x = \pi/2$:

$$y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} = 1 + \frac{1}{2} = 1,5,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + \cos \pi = 2 - 1 = 1.$$

Следовательно, наибольшего значения на отрезке $[0; \pi/2]$ данная функция достигает в точке $x = \pi/6$: $y(\pi/6) = 1,5$, а наименьшего — в точках $x = 0$ и $x = \pi/2$: $y(0) = y(\pi/2) = 1$. ◀

6.11. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 6

1. Определить, в каких точках и под каким углом пересекаются графики следующих функций:

а) $f(x) = x^3$, $g(x) = 1/x^2$; б) $f(x) = x^2 - 4x + 4$, $g(x) = -x^2 + 6x - 4$. (Ответ: а) $(1, 2)$, $\varphi = \pi/4$; б) $(1, 1)$, $(4, 4)$, $\varphi = \operatorname{arctg}(6/7)$.)

2. Записать в декартовых и полярных координатах уравнение нормали к кардиоиде $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ в точке с полярным углом $\varphi = \pi/6$. (Ответ: $x - y - (1 + 2\sqrt{3})a/4 = 0$, $\rho = (1 + 2\sqrt{3})a/(4(\cos \varphi - \sin \varphi))$.)

3. Тело массой $m = 1,5$ кг движется прямолинейно по закону $s(t) = t^2 + t + 1$ (s — в метрах, t — в секундах). Найти кинетическую энергию тела через 5 с после начала движения. (Ответ: 90,75 Дж.)

4. Материальная точка движется по спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ так, что угловая скорость вращения ее полярного радиуса постоянна и равна $\pi/30$ рад/с. Определить скорость удлинения полярного радиуса ρ , если $a = 10$ м. (Ответ: $\pi/3$ м/с.)

5. Количество теплоты Q Дж, необходимое для нагревания 1 кг воды от 0 до t °С, определяется формулой

$Q = t + 2 \cdot 10^{-5} t^2 + 3 \cdot 10^{-7} t^3$. Определить теплоемкость воды при $t = 100^\circ\text{C}$. (Ответ: 1,013 Дж/(кг · град).)

6. Камень брошен с заданной начальной скоростью под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, при каком значении α дальность полета камня будет наибольшей. (Ответ: $\pi/4$.)

7. Внутреннее сопротивление гальванического элемента равно R Ом. При каком внешнем сопротивлении мощность тока, получаемого от этого элемента во внешней цепи, будет наибольшей? (Ответ: R Ом.)

8. Исследовать данные функции и построить их графики:

а) $x = t^3 + 2t^2 + t, y = -3t^3 + 3t - 2$;

б) $x = (t - 1)^2(t - 2), y = (t - 1)^2(t - 3)$;

в) $x^3 - y^3 = 1$; г) $y^2(2 - x) = x^3$.

9. Найти пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow a} (2 - x/a)^{\operatorname{tg} (\pi x / (2a))}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2(1 - \sqrt{x})} - \frac{1}{3(1 - \sqrt[3]{x})} \right)$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}$.

(Ответ: а) e^{-1} ; б) e^a ; в) $1/12$; г) 1.)

10. Используя разложение функций по формуле Маклорена, найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}. \quad (\text{Ответ: } -1/12.)$$

11. Для осушения болот надо вырыть открытый канал, поперечное сечение которого — равнобедренная трапеция. Канал должен быть устроен так, чтобы при движении воды потери на трение были наименьшими. Определить величину угла откоса α , при котором эти потери будут наименьшими, если площадь поперечного сечения канала S , а глубина h . (Ответ: $\alpha = \pi/6$.)

12. Сечение шлюзового канала имеет форму прямоугольника, заканчивающегося полукругом. Периметр сечения равен 45 м. При каком радиусе полукруга сечение будет иметь наибольшую площадь? (Ответ: $\frac{45}{4 + \pi}$ м.)

13. Вода вытекает через отверстие в толстой стене. При этом секундный расход воды определяется по формуле $Q = cy\sqrt{h - y}$, где c — некоторая положительная постоянная.

ная; y — диаметр отверстия; h — глубина его низшей точки. Определить, при каком диаметре отверстия y секундный расход воды Q будет наибольшим. (Ответ: $\frac{2}{3}h$.)

14. Найти наименьшую длину стрелы крана, необходимую для монтажа плит перекрытия здания высотой H и шириной a , при условии, что кран может двигаться вдоль фасада здания параллельно ему, высота основания стрелы крана над землей h , зазор между стеной здания и стрелой крана всегда не менее m . Кран должен подавать детали так, чтобы крюк его приходился точно над серединой здания. Решить задачу в общем виде, сделать расчет при $H = 125$ м, $m = 15$ м, $a = 10$ м, $h = 116$ м. (Ответ: 23,3 м.)

15. По трубе круглого сечения радиусом r течет вода. Известно, что скорость течения прямо пропорциональна так называемому гидравлическому радиусу R , вычисляемому по формуле $R = S/p$, где S — площадь сечения потока воды по трубе; p — смоченный (подводный) периметр сечения трубы. При каком центральном угле заполнения трубы водой скорость течения воды будет наибольшей? (Ответ: 258° .)

16. Показать, что точка максимума момента изгиба равномерно нагруженного бруса длиной l находится в центре бруса. (Момент изгиба бруса в точке M задается формулой $M = \frac{1}{2}lx - \frac{1}{2}\omega x^2$, где ω — удельная нагрузка; x — расстояние от точки до начала бруса.)

17. Однородный стержень AB , который может вращаться около точки A , несет груз Q на расстоянии s от точки A и удерживается в равновесии вертикальной силой P , приложенной к свободному концу B стержня. Вес погонного сантиметра стержня q . Определить длину стержня, при которой вертикальная сила P будет наименьшей. (Ответ: $|AB| = \sqrt{2sQ/q}$, $P_{\text{наим}} = \sqrt{2sqQ}$.)

18. Определить приблизительно (с точностью до целого числа) относительную погрешность при вычислении поверхности сферы, если при определении ее радиуса относительная погрешность составила 1%. (Ответ: 2%.)

19. Определить приблизительно (в процентах, с точностью до целого числа) изменение силы тока проводника, если его сопротивление увеличивается на 1%. (Ответ: уменьшится на 1%.)

20. Как следует изменить длину маятника $l = 20$ см,

чтобы период его колебаний T увеличился на 0,05 с?
(Период $T = 2\pi\sqrt{l/q}$.) (Ответ: увеличить на 2,23 см.)

21. Найти координаты центра кривизны (параметрические уравнения эволюты) данных линий в произвольной точке:

а) гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$;

б) астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

(Ответ: а) $\xi = (a^2 + b^2)x^3/a^4$, $\eta = -(a^2 + b^2)y^3/b^4$; б) $\xi = x + 3x^{1/3}y^{2/3}$, $\eta = y + 3x^{2/3}y^{1/3}$.)

22. Вычислить наибольшее значение радиуса кривизны линии $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$. (Ответ: $\frac{3}{4} a$.)

23. Найти уравнение окружности кривизны линии $y = e^x$ в точке $(0, 1)$. (Ответ: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8$.)

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Контрольная работа «Векторная алгебра» (2 часа)

1

Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Положив $\vec{AK} = \mathbf{a}$ и $\vec{AL} = \mathbf{b}$, выразить через \mathbf{a} и \mathbf{b} указанные векторы.

1.1. \vec{BC}, \vec{CD} . 1.2. \vec{AC}, \vec{AB} . 1.3. \vec{BD}, \vec{BL} .

1.4. \vec{KD}, \vec{KL} . 1.5. \vec{BK}, \vec{DL} . 1.6. \vec{CK}, \vec{BA} .

1.7. \vec{DA}, \vec{DB} . 1.8. \vec{LB}, \vec{LC} . 1.9. \vec{CA}, \vec{KB} .

1.10. \vec{DB}, \vec{DA} .

В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ со стороной, равной 2, из вершины A выходят единичные векторы \mathbf{m} по направлению \vec{AB} и \mathbf{n} по направлению \vec{AF} . Выразить через \mathbf{m} и \mathbf{n} указанные векторы.

1.11. \vec{AD}, \vec{EC} . 1.12. \vec{BD}, \vec{DF} . 1.13. \vec{AE}, \vec{DF} .

1.14. \vec{AC}, \vec{BE} . 1.15. \vec{BC}, \vec{BD} . 1.16. \vec{FB}, \vec{AE} .

1.17. \vec{AD}, \vec{CF} . 1.18. \vec{DA}, \vec{FC} . 1.19. \vec{AC}, \vec{BD} .

1.20. \vec{CE}, \vec{FB} .

Дан тетраэдр $OABC$. Положив $\vec{OA} = \mathbf{a}$, $\vec{OB} = \mathbf{b}$, $\vec{OC} = \mathbf{c}$, выразить через \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} указанные векторы (точки M , P и R — середины ребер OA , OB и OC , а N , Q и S — середины противоположных ребер).

1.21. \vec{MN}, \vec{MC} . 1.22. \vec{PQ}, \vec{PA} . 1.23. \vec{RS}, \vec{RB} .

1.24. \vec{NM}, \vec{NO} . 1.25. \vec{QP}, \vec{OQ} . 1.26. \vec{SR}, \vec{OS} .

1.27. \vec{MP}, \vec{CS} . 1.28. \vec{NP}, \vec{CM} . 1.29. \vec{NQ}, \vec{BR} .

1.30. \vec{RN}, \vec{MB} .

2

Найти площадь треугольника, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} .

2.1. $\mathbf{a} = -2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

2.2. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

2.3. $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$.

2.4. $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

2.5. $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

2.6. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

2.7. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

2.8. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

2.9. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

2.10. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

Параллелограмм построен на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} . Найти его высоту, опущенную на сторону, совпадающую с вектором \mathbf{a} .

- 2.11. $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.
 2.12. $\mathbf{a} = -4\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
 2.13. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.
 2.14. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.
 2.15. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.
 2.16. $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$.
 2.17. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
 2.18. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.
 2.19. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$.
 2.20. $\mathbf{a} = 11\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

Найти $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, если $|\mathbf{a}| = k$, $|\mathbf{b}| = l$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = p$.

- 2.21. $k = \sqrt{29}$, $l = \sqrt{61}$, $p = 36$. 2.22. $k = \sqrt{74}$, $l = \sqrt{20}$, $p = 20$.
 2.23. $k = \sqrt{45}$, $l = \sqrt{14}$, $p = 5$. 2.24. $k = \sqrt{33}$, $l = \sqrt{59}$, $p = 25$.
 2.25. $k = \sqrt{46}$, $l = \sqrt{38}$, $p = -24$. 2.26. $k = \sqrt{30}$, $l = \sqrt{29}$, $p = -28$.
 2.27. $k = \sqrt{50}$, $l = \sqrt{14}$, $p = -23$. 2.28. $k = \sqrt{45}$, $l = \sqrt{21}$, $p = 20$.
 2.29. $k = \sqrt{53}$, $l = \sqrt{30}$, $p = 12$. 2.30. $k = \sqrt{98}$, $l = \sqrt{21}$, $p = 10$.

3

Найти проекцию вектора \mathbf{c} на направление вектора \mathbf{d} .

- 3.1. $\mathbf{c} = (-2, 0, 1)$, $\mathbf{d} = (1, 2, -3)$. 3.2. $\mathbf{c} = (4, -5, 1)$, $\mathbf{d} = (3, 2, -4)$.
 3.3. $\mathbf{c} = (2, -8, 1)$, $\mathbf{d} = (-3, -1, 2)$. 3.4. $\mathbf{c} = (-4, 5, 2)$, $\mathbf{d} = (3, 4, -6)$.
 3.5. $\mathbf{c} = (9, 5, -4)$, $\mathbf{d} = (3, 2, 6)$. 3.6. $\mathbf{c} = (3, -4, 11)$, $\mathbf{d} = (-2, 5, 3)$.
 3.7. $\mathbf{c} = (3, 7, -5)$, $\mathbf{d} = (1, 4, -9)$. 3.8. $\mathbf{c} = (3, -6, 5)$, $\mathbf{d} = (1, 4, 4)$.
 3.9. $\mathbf{c} = (-7, -5, 1)$, $\mathbf{d} = (3, 4, -2)$. 3.10. $\mathbf{c} = (5, 4, -1)$, $\mathbf{d} = (2, -4, 6)$.

Вектор \mathbf{x} , коллинеарный вектору \mathbf{a} , образует острый угол с осью

Oz. Найти координаты вектора \mathbf{x} , если $|\mathbf{x}| = t$.

- 3.11. $\mathbf{a} = (4, -7, 1)$, $t = \sqrt{264}$. 3.12. $\mathbf{a} = (5, -3, -1)$, $t = \sqrt{315}$.
 3.13. $\mathbf{a} = (4, 5, -6)$, $t = \sqrt{308}$. 3.14. $\mathbf{a} = (3, -5, 7)$, $t = \sqrt{1328}$.
 3.15. $\mathbf{a} = (4, -2, 2)$, $t = 10\sqrt{6}$. 3.16. $\mathbf{a} = (5, 6, -7)$, $t = 3\sqrt{110}$.
 3.17. $\mathbf{a} = (5, -3, 9)$, $t = 2\sqrt{115}$. 3.18. $\mathbf{a} = (5, -3, 1)$, $t = 5\sqrt{35}$.
 3.19. $\mathbf{a} = (7, -4, 2)$, $t = 4\sqrt{69}$. 3.20. $\mathbf{a} = (3, -1, 7)$, $t = 6\sqrt{59}$.

Вектор \mathbf{x} , перпендикулярный к векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} , образует с осью *Oy* тупой угол. Найти координаты вектора \mathbf{x} , если $|\mathbf{x}| = p$.

- 3.21. $\mathbf{a} = (4, 2, -2)$, $\mathbf{b} = (5, 1, -3)$, $p = \sqrt{15}$.
 3.22. $\mathbf{a} = (7, 5, 2)$, $\mathbf{b} = (0, 4, 3)$, $p = \sqrt{26}$.
 3.23. $\mathbf{a} = (4, 3, -1)$, $\mathbf{b} = (3, 4, 8)$, $p = \sqrt{42}$.
 3.24. $\mathbf{a} = (2, 0, 2)$, $\mathbf{b} = (4, -6, 0)$, $p = \sqrt{22}$.
 3.25. $\mathbf{a} = (3, 4, -1)$, $\mathbf{b} = (4, 6, -4)$, $p = \sqrt{42}$.
 3.26. $\mathbf{a} = (4, 6, 5)$, $\mathbf{b} = (-4, 2, 7)$, $p = \sqrt{17}$.
 3.27. $\mathbf{a} = (-2, 7, 10)$, $\mathbf{b} = (0, 3, 4)$, $p = \sqrt{26}$.
 3.28. $\mathbf{a} = (-1, 9, 2)$, $\mathbf{b} = (14, -1, -3)$, $p = \sqrt{27}$.
 3.29. $\mathbf{a} = (4, 5, 8)$, $\mathbf{b} = (5, 2, -7)$, $p = \sqrt{26}$.
 3.30. $\mathbf{a} = (12, 3, -2)$, $\mathbf{b} = (11, 7, 1)$, $p = \sqrt{56}$.

Найти угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} при указанных условиях.

$$4.1. |\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2, (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2 = 20.$$

$$4.2. |\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = 3, (2\mathbf{a} - 3\mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} + 4\mathbf{b})^2 = 69.$$

$$4.3. |\mathbf{a}| = 4, |\mathbf{b}| = 1, (3\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - 5\mathbf{b})^2 = 189.$$

$$4.4. |\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 5, (\mathbf{a} - 3\mathbf{b})^2 + (2\mathbf{a} + 4\mathbf{b})^2 = 595.$$

$$4.5. |\mathbf{a}| = 5, |\mathbf{b}| = 4, (4\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 - (3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})^2 = 77.$$

$$4.6. |\mathbf{a}| = 4, |\mathbf{b}| = 3, (2\mathbf{a} - 5\mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^2 = 93.$$

$$4.7. |\mathbf{a}| = 6, |\mathbf{b}| = 1, (\mathbf{a} - 8\mathbf{b})^2 - (2\mathbf{a} + 3\mathbf{b})^2 = 31.$$

$$4.8. |\mathbf{a}| = 5, |\mathbf{b}| = 4, (3\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} + 6\mathbf{b})^2 = 0.$$

$$4.9. |\mathbf{a}| = 7, |\mathbf{b}| = 2, (\mathbf{a} + 4\mathbf{b})^2 + (3\mathbf{a} - 7\mathbf{b})^2 = 274.$$

$$4.10. |\mathbf{a}| = 3, |\mathbf{b}| = 6, (5\mathbf{a} - 2\mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} + 3\mathbf{b})^2 = 270.$$

Найти угол между векторами \mathbf{m} и \mathbf{n} , если $|\mathbf{m}| = |\mathbf{n}| = 1$ и указанные векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} взаимно перпендикулярны.

$$4.11. \mathbf{a} = 5\mathbf{m} - 4\mathbf{n}, \mathbf{b} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}.$$

$$4.12. \mathbf{a} = 3\mathbf{m} + 2\mathbf{n}, \mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}.$$

$$4.13. \mathbf{a} = \mathbf{m} + \mathbf{n}, \mathbf{b} = 2\mathbf{m} - \mathbf{n}.$$

$$4.14. \mathbf{a} = \mathbf{m} + 2\mathbf{n}, \mathbf{b} = 5\mathbf{m} - 4\mathbf{n}.$$

$$4.15. \mathbf{a} = \mathbf{m} - 2\mathbf{n}, \mathbf{b} = 5\mathbf{m} + 4\mathbf{n}.$$

$$4.16. \mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 2\mathbf{n}, \mathbf{b} = \mathbf{m} + 4\mathbf{n}.$$

$$4.17. \mathbf{a} = 2\mathbf{m} - 3\mathbf{n}, \mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}.$$

$$4.18. \mathbf{a} = 2\mathbf{m} + \mathbf{n}, \mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}.$$

$$4.19. \mathbf{a} = 2\mathbf{m} + 4\mathbf{n}, \mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{n}.$$

$$4.20. \mathbf{a} = 3\mathbf{m} - 4\mathbf{n}, \mathbf{b} = \mathbf{m} + \mathbf{n}.$$

Выяснить, для каких векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} выполняются данные условия.

$$4.21. |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

$$4.22. |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|.$$

$$4.23. |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|.$$

$$4.24. |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

$$4.25. |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| = 0.$$

$$4.26. \mathbf{a}/|\mathbf{a}| = \mathbf{b}/|\mathbf{b}|.$$

$$4.27. (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2.$$

$$4.28. \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{b}.$$

$$4.29. (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2\mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

$$4.30. |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2.$$

5

Выяснить, при каком значении α векторы \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} будут компланарны.

$$5.1. \mathbf{a} = (3, -1, 4), \mathbf{b} = (2, \alpha, -5), \mathbf{c} = (1, 0, 2).$$

$$5.2. \mathbf{a} = (4, -2, \alpha), \mathbf{b} = (-5, 1, 3), \mathbf{c} = (2, 4, -3).$$

$$5.3. \mathbf{a} = (3, -1, 4), \mathbf{b} = (1, -4, 0), \mathbf{c} = (\alpha, 3, 2).$$

$$5.4. \mathbf{a} = (\alpha, 2, -5), \mathbf{b} = (3, 1, 1), \mathbf{c} = (4, -1, 0).$$

$$5.5. \mathbf{a} = (-1, 5, -7), \mathbf{b} = (4, 2, \alpha), \mathbf{c} = (3, 5, 1).$$

$$5.6. \mathbf{a} = (2, 1, -1), \mathbf{b} = (4, -2, 1), \mathbf{c} = (\alpha, -3, -2).$$

$$5.7. \mathbf{a} = (4, -5, 3), \mathbf{b} = (2, \alpha, -1), \mathbf{c} = (1, 5, 6).$$

$$5.8. \mathbf{a} = (3, -2, 1), \mathbf{b} = (1, -5, 2), \mathbf{c} = (\alpha, 4, -1).$$

$$5.9. \mathbf{a} = (2, -3, 5), \mathbf{b} = (1, -4, \alpha), \mathbf{c} = (2, 1, -3).$$

$$5.10. \mathbf{a} = (1, 1, \alpha), \mathbf{b} = (-3, 3, 1), \mathbf{c} = (2, 3, -3).$$

Найти объем пирамиды, построенной на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} .

$$5.11. \mathbf{a} = (5, 2, 0), \mathbf{b} = (2, 5, 0), \mathbf{c} = (1, 2, 4).$$

$$5.12. \mathbf{a} = (-12, 2, -4), \mathbf{b} = (-4, 2, 3), \mathbf{c} = (-3, 4, -3).$$

$$5.13. \mathbf{a} = (0, 1, -1), \mathbf{b} = (1, 0, -1), \mathbf{c} = (3, 2, 0).$$

$$5.14. \mathbf{a} = (-5, 6, -8), \mathbf{b} = (-2, -3, 1), \mathbf{c} = (-3, 1, 1).$$

$$5.15. \mathbf{a} = (4, 4, -6), \mathbf{b} = (1, 3, 1), \mathbf{c} = (0, -2, 0).$$

$$5.16. \mathbf{a} = (1, 2, -1), \mathbf{b} = (0, 2, 2), \mathbf{c} = (-1, 1, -2).$$

$$5.17. \mathbf{a} = (-1, 3, 3), \mathbf{b} = (0, 4, 2), \mathbf{c} = (3, 3, -4).$$

$$5.18. \mathbf{a} = (-3, 6, 2), \mathbf{b} = (-4, -1, -5), \mathbf{c} = (1, 0, 5).$$

$$5.19. \mathbf{a} = (3, -2, 1), \mathbf{b} = (1, 4, 0), \mathbf{c} = (5, 2, 3).$$

$$5.20. \mathbf{a} = (-3, 0, -2), \mathbf{b} = (-1, -1, 3), \mathbf{c} = (-4, -1, 0).$$

Вычислить высоту параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{a} , \mathbf{b} и \mathbf{c} , если за основание взят параллелограмм, построенный на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} .

- 5.21. $\mathbf{a} = (2, 3, -1)$, $\mathbf{b} = (-2, 4, 5)$, $\mathbf{c} = (3, -1, 4)$.
 5.22. $\mathbf{a} = (3, 6, -8)$, $\mathbf{b} = (-2, 4, -6)$, $\mathbf{c} = (5, 2, -1)$.
 5.23. $\mathbf{a} = (-4, 5, -4)$, $\mathbf{b} = (-4, 0, 2)$, $\mathbf{c} = (-3, 3, -5)$.
 5.24. $\mathbf{a} = (-1, -2, 5)$, $\mathbf{b} = (-4, -2, 5)$, $\mathbf{c} = (1, -3, -2)$.
 5.25. $\mathbf{a} = (2, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (-3, 0, 4)$, $\mathbf{c} = (0, 4, 3)$.
 5.26. $\mathbf{a} = (-2, 5, 5)$, $\mathbf{b} = (-2, 1, -1)$, $\mathbf{c} = (-5, 1, 5)$.
 5.27. $\mathbf{a} = (-2, 3, 0)$, $\mathbf{b} = (-2, 0, 6)$, $\mathbf{c} = (0, 3, -2)$.
 5.28. $\mathbf{a} = (4, -6, 4)$, $\mathbf{b} = (4, -1, 2)$, $\mathbf{c} = (3, 2, 7)$.
 5.29. $\mathbf{a} = (-12, 2, -4)$, $\mathbf{b} = (-4, 2, 3)$, $\mathbf{c} = (-3, 4, -3)$.
 5.30. $\mathbf{a} = (5, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (2, 5, 0)$, $\mathbf{c} = (1, 2, 4)$.

2. Контрольная работа «Пределы» (1 час)

Найти пределы.

1

- | | |
|--|--|
| 1.1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^2 + 4x + 1}$. | 1.2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 2}$. |
| 1.3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{2x^2 - 5x + 1}$. | 1.4. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 5x - 4}$. |
| 1.5. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 4x + 5}$. | 1.6. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x^2 - 3x - 5}$. |
| 1.7. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 + 2x - 3}$. | 1.8. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - x + 1}$. |
| 1.9. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 5x + 2}$. | 1.10. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 3}{x^2 - 4}$. |
| 1.11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2}$. | 1.12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 3x + 2}$. |
| 1.13. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 2x - 3}$. | 1.14. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x + 5}{x^2 - 6x + 5}$. |
| 1.15. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2x^2 - 13x - 7}{x^2 - 9x + 14}$. | 1.16. $\lim_{m \rightarrow 3} \frac{3m^2 - 5m - 3}{m^2 - 5m + 6}$. |
| 1.17. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 - 7x + 10}$. | 1.18. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 9x - 18}{x^2 - 7x + 6}$. |
| 1.19. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x^2 - 17x - 28}{x^2 - 9x + 14}$. | 1.20. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 8x - 3}{x^2 - x - 6}$. |
| 1.21. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{2x^2 + x - 6}$. | 1.22. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6}$. |
| 1.23. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 2}{3x^2 + 4x + 1}$. | 1.24. $\lim_{t \rightarrow -1} \frac{2t^2 - 5t - 7}{3t^2 + t - 2}$. |
| 1.25. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{2x^2 + 7x - 15}$. | 1.26. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 9x + 4}{x^2 - x - 20}$. |
| 1.27. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4x + 3}$. | 1.28. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{2x^2 + 5x + 2}$. |

$$1.29. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 2x - 8}$$

$$1.30. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 5x + 6}$$

2

$$2.1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{3x^2 + 2x - 8}$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x - 1}$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{10x - 3x^2 - 8}{3x^2 - 8x + 4}$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 3x - 4}$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{7x - x^2 - 12}{2x^2 - 11x + 15}$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3 - 8x - 3x^2}{x^2 + x - 6}$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 17x + 35}{x^2 - x - 20}$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{4 - 3x^2 - x}$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 16x + 1}{3x^2 + 5x - 2}$$

$$2.10. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1}$$

$$2.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{3x^2 + x + 2}$$

$$2.12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}$$

$$2.13. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 10x + 5}{x^2 - 2x - 3}$$

$$2.14. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 + 6x + 5}$$

$$2.15. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^2 + 5x + 6}$$

$$2.16. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 9x + 2}{x^2 - 3x - 10}$$

$$2.17. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x + 1}{x^2 - 6x - 7}$$

$$2.18. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 + 3x - 7}$$

$$2.19. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{3x^2 - 4x - 3}$$

$$2.20. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{2x^2 - 7x - 18}$$

$$2.21. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 - 4x + 3}$$

$$2.22. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{x^2 - 7x + 10}$$

$$2.23. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 16}$$

$$2.24. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x + 4}{2x^2 + x - 3}$$

$$2.25. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 2}{4x - 3x^2 - 1}$$

$$2.26. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 3}$$

$$2.27. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 7x + 2}$$

$$2.28. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 10x + 8}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$2.29. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x^2 + 5x + 4}$$

$$2.30. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 3x - 9}{3x^2 - 5x - 10}$$

3

$$3.1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x - 2} - 2}{x^2 - 4}$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x + 4} - 1}{\sqrt{3 - 2x} - 3}$$

$$3.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{9 - x^2} - 3}$$

$$3.4. \lim_{z \rightarrow -2} \frac{\sqrt{z + 6} - 2}{z^2 - 4}$$

$$3.5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{x^2 - 9}.$$

$$3.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-x} - 3}{\sqrt{x+4} - 2}.$$

$$3.9. \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{n^2+9} - 3}{\sqrt{4-n^2} - 2}.$$

$$3.11. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 - 9}.$$

$$3.13. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-1} - 3}{x^2 - 2x}.$$

$$3.15. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{4x+1} - 3}.$$

$$3.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + 3}.$$

$$3.19. \lim_{m \rightarrow 3} \frac{9 - m^2}{\sqrt{4m-3} - 3}.$$

$$3.21. \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1+3z^2} - 2}{z^2 - z}.$$

$$3.23. \lim_{t \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1+3t} - \sqrt{2t+6}}{t^2 - 5t}.$$

$$3.25. \lim_{m \rightarrow 4} \frac{\sqrt{6m+1} - 5}{\sqrt{m} - 2}.$$

$$3.27. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{2x-2} - 4}.$$

$$3.29. \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-n} - \sqrt{3+n}}{5n}.$$

$$3.6. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{2x+1} - 3}.$$

$$3.8. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{2 - \sqrt{x+1}}.$$

$$3.10. \lim_{m \rightarrow 4} \frac{5 - \sqrt{m^2+9}}{\sqrt{2m+1} - 3}.$$

$$3.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+3x} - \sqrt{4-3x}}{7x}.$$

$$3.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x+4} - 3}{\sqrt{2x-1} - 1}.$$

$$3.16. \lim_{b \rightarrow 5} \frac{\sqrt{b-1} - 2}{\sqrt{2b-1} - 3}.$$

$$3.18. \lim_{a \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3a+10} - 4}{a^2 - 4}.$$

$$3.20. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{\sqrt{2x+11} - 5}.$$

$$3.22. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-2} - 2}{\sqrt{x+1} - 2}.$$

$$3.24. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{2x-2}}.$$

$$3.26. \lim_{z \rightarrow 3} \frac{\sqrt{z-1} - \sqrt{2}}{\sqrt{2z+3} - 3}.$$

$$3.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9} - 3}{\sqrt{x^2+25} - 5}.$$

$$3.30. \lim_{a \rightarrow 4} \frac{a-4}{\sqrt{5a+5} - 5}.$$

4

$$4.1. \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2a^3 - a + 1}{a^2 + 2a - 5}.$$

$$4.3. \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^3 + 3z - 1}{2z^3 + z^2 - 4}.$$

$$4.5. \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{3m^3 + 2m - 5}{m^4 + 5m^2 - 1}.$$

$$4.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 4}.$$

$$4.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2 + 2n - 3}.$$

$$4.6. \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^2 + z - 3}{z^2 + 3z + 1}.$$

- 4.7. $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{3a^2 - 4a + 1}{a^3 + 3a - 4}$.
- 4.8. $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^3 - 8m + 1}{3m^3 - m + 4}$.
- 4.9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4n + 1}{2n^2 + n - 3}$.
- 4.10. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2 - 3z - z^2}{2z^3 + z - 1}$.
- 4.11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4n^5 + 1}{2n^5 + 3n^3 - n}$.
- 4.12. $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{4a^3 + 3a^2 - 1}{2a^3 - 3a + 1}$.
- 4.13. $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y^6 - 3y^2 - 2}{2y^6 + 4y + 5}$.
- 4.14. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{6z^5 - 3z^2 + 1}{3z^5 - 2z + 3}$.
- 4.15. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 5}{3x^4 + 2x^2 - x}$.
- 4.16. $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a^4 - 3a^2 + 2}{5a^4 - 3a - 2}$.
- 4.17. $\lim_{b \rightarrow -\infty} \frac{9b^5 - 4b^3 + 2}{3b^4 - 2b + 3}$.
- 4.18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^3 - 2x^2 - 1}$.
- 4.19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^5 - 3n^2 + 1}{2n^5 - 2n + 3}$.
- 4.20. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{9z^3 - 4z^2 + 1}{6z^3 + 3z + 2}$.
- 4.21. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - x^2 + x}{x^4 + 2x + 5}$.
- 4.22. $\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{6n^3 - 2n + 7}{3n^3 - 5n + 2}$.
- 4.23. $\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{7n^4 - 2n^3 + 2}{n^4 + 2n}$.
- 4.24. $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{3a^7 + 6a - 5}{4a^7 + 2a^3 - 3}$.
- 4.25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5 - 3x^2 + 9}{2x^5 + 2x + 5}$.
- 4.26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - 5n + 2}{2n^4 + 3n^2 - n}$.
- 4.27. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^4 - 4x^3 + 8}{2x^3 - 3x^2 + 1}$.
- 4.28. $\lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{3a^4 - 4a^2 + 5}{6a^4 + 2a^3 - 1}$.
- 4.29. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 3n^2 - n^5}{2n + n^2 - 3n^5}$.
- 4.30. $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z^3 + 7z - 4}{6z^3 - 3z^2 + 2}$.

5

- 5.1. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sin 3\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha$.
- 5.2. $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4\varphi}{\sin^2 3\varphi}$.
- 5.3. $\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\arcsin 6\beta}{2\beta}$.
- 5.4. $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi \sin 2\varphi}{\operatorname{tg}^2 3\varphi}$.
- 5.5. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5\alpha}{3\alpha}$.
- 5.6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1 - \cos 4x}}{\sin^2 3x}$.
- 5.7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 6x}{x \operatorname{tg} 2x}$.
- 5.8. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 5y}{\arcsin 2y}$.
- 5.9. $\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3\beta}{1 - \cos 4\beta}$.
- 5.10. $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 \varphi}{3\varphi \sin \varphi}$.
- 5.11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 4x}{\sin^2 3x}$.
- 5.12. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4\alpha}{\alpha \sin 3\alpha}$.
- 5.13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\operatorname{tg}^2 5x}$.
- 5.14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{4x}$.
- 5.15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{4x^2}$.
- 5.16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{3x^2}$.

$$5.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x \operatorname{tg} 2x}.$$

$$5.19. \lim_{z \rightarrow 0} \frac{5z^2}{\sin 3z \cdot \operatorname{tg} 2z}.$$

$$5.21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\operatorname{arctg} 3x}.$$

$$5.23. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8\alpha}{1 - \cos 2\alpha}.$$

$$5.25. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha \sin 3\alpha}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}.$$

$$5.27. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin}^2 3\alpha}{2\alpha \sin 5\alpha}.$$

$$5.29. \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 3x \cdot \operatorname{ctg}^2 5x.$$

$$5.18. \lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cdot \operatorname{ctg} 3x.$$

$$5.20. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sin 8\alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$5.22. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg}^2 3x \cdot \operatorname{ctg}^2 2x.$$

$$5.24. \lim_{x \rightarrow 0} 3x \operatorname{ctg} 7x.$$

$$5.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{1 - \cos 4x}.$$

$$5.28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 2x}{1 - \cos 3x}.$$

$$5.30. \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3\varphi}{\operatorname{arctg}^2 2\varphi}.$$

6

$$6.1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{3}{2x-1}\right)^{4x}.$$

$$6.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{3x-4}.$$

$$6.5. \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{4}{3y-1}\right)^{y+2}.$$

$$6.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{5-2x}.$$

$$6.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3x-1}\right)^{1-4x}.$$

$$6.11. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{3x+1}.$$

$$6.13. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-5}\right)^{x-1}.$$

$$6.15. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-2}\right)^{3x}.$$

$$6.17. \lim_{x \rightarrow 2} (2x-3)^{x^2/(x-2)}.$$

$$6.19. \lim_{x \rightarrow 1} (3x-2)^{5x/(x-1)}.$$

$$6.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x.$$

$$6.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+3}.$$

$$6.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+1}{5x-1}\right)^{x-4}.$$

$$6.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x+4}\right)^{2x-5}.$$

$$6.4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x+2}{3x+5}\right)^{4-x}.$$

$$6.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-2}.$$

$$6.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{2x-4}.$$

$$6.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x-4}\right)^{1-6x}.$$

$$6.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x+2}{x+3}\right)^{2x+3}.$$

$$6.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2-4x}{1-4x}\right)^{x+3}.$$

$$6.16. \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{2x-3}{2x-1}\right)^x.$$

$$6.18. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x+5}{4x-1}\right)^{x+3}.$$

$$6.20. \lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{(x+1)/(x-3)}.$$

$$6.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+4}\right)^{x-1}.$$

$$6.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+4}{2x-4}\right)^{x-3}.$$

$$6.26. \lim_{x \rightarrow 1} (3x-2)^{x/(x^2-1)}.$$

$$6.27. \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{4+3t}{1+3t} \right)^{t-2}$$

$$6.28. \lim_{x \rightarrow 2} (5-2x)^{x/(x-2)}$$

$$6.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x+3}{x-4} \right)^x$$

$$6.30. \lim_{x \rightarrow 1} (7-6x)^{x(3x-3)}$$

3. Контрольная работа «Производные и их приложения» (2 часа)

1. Найти производную первого порядка y' .

$$1.1. y = \left(\frac{2}{27x} - \frac{1}{9x^2} \right) \sqrt{3x+x^2}. \quad 1.2. y = x \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$1.3. y = \sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$$

$$1.4. y = \sqrt[3]{\frac{x+3}{3x-5}}$$

$$1.5. y = \frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$$

$$1.6. y = \frac{\sqrt{1+\cos^3 x}}{1+\sin 3x}$$

$$1.7. y = \left(1 + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)^3$$

$$1.8. y = \frac{x}{(x+1)^2(x^2+1)^3}$$

$$1.9. y = \sqrt[5]{x+x^3\sqrt{x}}$$

$$1.10. y = \sqrt[3]{\frac{1+\sin 3x}{3+2\sin 3x}}$$

$$1.11. y = \sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$$

$$1.12. y = \frac{3}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}} - 2\sqrt{6x+5}$$

$$1.13. y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$$

$$1.14. y = x \sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$$

$$1.15. y = \sqrt{x+\sqrt[3]{x}}$$

$$1.16. y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}$$

$$1.17. y = \sqrt{\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^3-\sqrt{x}}}$$

$$1.18. y = 5\sqrt{x^2+\sqrt{x}+1/x}$$

$$1.19. y = 1 + \sqrt{\frac{1+x}{x-1}}$$

$$1.20. y = \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{3x-2}}$$

$$1.21. y = \sqrt[4]{x^2+3x} - \sqrt[5]{(6x-1)^2}. \quad 1.22. y = \frac{2x}{\sqrt{1+x}} - 4\sqrt{1+x}$$

$$1.23. y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$$

$$1.24. y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$$

$$1.25. y = \sqrt[5]{3x^2+1} + \sqrt[3]{x^3-4}$$

$$1.26. y = x\sqrt{1+x^2}$$

$$1.27. y = 5\sqrt[5]{4x+3} - \frac{2}{\sqrt{x^3+x+1}}. \quad 1.28. y = 3\sqrt[3]{x^{5^2+5x^4}-5/x}$$

$$1.29. y = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

$$1.30. y = x + \sqrt[5]{\frac{1+x^5}{1-x^5}}$$

2. Найти производную первого порядка y' .

- 2.1. $y = 3^{\operatorname{arctg}^2(4x+1)}$.
2.2. $s = \ln \frac{5 + \sqrt{25 - t^2}}{t}$.
2.3. $z = y^{\operatorname{arcsin}((2y+1)/3)}$.
2.4. $y = (1 + \operatorname{ctg}^2 3x)e^{-x}$.
2.5. $y = e^{-\varphi^2} \cos^3(2\varphi + 3)$.
2.6. $y = e^{-\sqrt{x}}/(1 + e^{2x})$.
2.7. $y = e^{-1/\cos x}$.
2.8. $y = \sqrt[3]{(1 + \sin^3 2x)^2}$.
2.9. $y = 3^{x \cos^3 x}$.
2.10. $y = e^{x/\sqrt{3}} \operatorname{arctg}^2 x$.
2.11. $y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$.
2.12. $y = \cos 2x \cdot \sin^2 x$.
2.13. $y = \sin^3 5x \cdot \sin^5 3x$.
2.14. $Q = e^{\cos^2 3\varphi}$.
2.15. $y = e^{\operatorname{tg} x} \cos x$.
2.16. $y = \operatorname{arcsin}(\operatorname{tg} x)$.
2.17. $y = e^{\cos x} \sin^2 x$.
2.18. $y = \ln \ln \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$.
2.19. $z = (\sin y)/(1 + \operatorname{tg} y)$.
2.20. $s = e^t/\cos t$.
2.21. $y = (1 + e^t)/(1 - e^t)$.
2.22. $y = \sin^2 3x$.
2.23. $y = \sqrt{1 + \ln^2 x}$.
2.24. $y = \frac{4 \ln x}{1 - \ln x}$.
2.25. $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{ctg} x + x$.
2.26. $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}} - x$.
2.27. $y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}}$.
2.28. $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$.
2.29. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.
2.30. $y = \operatorname{tg}^2(x^3 + 1)$.

3. Вычислить первую производную функции при указанном значении аргумента или параметра либо при заданных координатах точки.

- 3.1. $f(x) = (1 - 2x)/(1 + \sqrt[3]{2x})$, $x = 4$.
3.2. $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x}}$, $x = 1$.
3.3. $f(x) = xe^{x/a}$, $x = 0$.
3.4. $f(t) = \ln(1 + a^{-2t})$, $t = 0$.
3.5. $f(t) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos t}$, $t = \pi/2$.
3.6. $f(x) = x/(2x - 1)$, $x = -2$.
3.7. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x = -8$.
3.8. $f(x) = (\sqrt{x} - 1)^2/x$, $x = 0,01$.
3.9. $f(x) = x^2 - 1/(2x^2)$, $x = \pm 2$.
3.10. $f(x) = x^3/3 - x^2 + x$, $x = -1$.
3.11. $f(x) = e^{-x} \cos 3x$, $x = 0$.
3.12. $f(x) = \ln(1 + x) + \operatorname{arcsin}(x/2)$, $x = 1$.
3.13. $f(x) = \operatorname{tg}^3(\pi x/6)$, $x = 2$.
3.14. $2y = 1 + xy^3$, $x = 1$, $y = 1$.
3.15. $y = (x + y)^3 - 27(x - y)$, $x = 2$, $y = 1$.
3.16. $ye^{y^x} = e^{x+1}$, $x = 0$, $y = 1$.

5.7.
$$\begin{cases} x = t^2 + t + 1, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$$

5.9.
$$\begin{cases} x = (2-t)/(2+t^2), \\ y = t^2/(2+t^2). \end{cases}$$

5.11.
$$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$$

5.13.
$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$$

5.15.
$$\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t, \\ y = 2 \sin t - \sin 2t. \end{cases}$$

5.17.
$$\begin{cases} x = 3t - t^3, \\ y = 3t^2. \end{cases}$$

5.19.
$$\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = 1/\cos^2 t. \end{cases}$$

5.21.
$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3/3 - t. \end{cases}$$

5.23.
$$\begin{cases} x = \sin(t/2), \\ y = \cos t. \end{cases}$$

5.25.
$$\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = \cos t. \end{cases}$$

5.27.
$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \\ y = 2 \ln \operatorname{ctg} t. \end{cases}$$

5.29.
$$\begin{cases} x = 3 \cos^2 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$$

5.8.
$$\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = 1/\cos^2 t. \end{cases}$$

5.10.
$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 2t, \\ y = \sin^3 2t. \end{cases}$$

5.12.
$$\begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin^2 t. \end{cases}$$

5.14.
$$\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$$

5.16.
$$\begin{cases} x = 2t^2 + t, \\ y = \ln t. \end{cases}$$

5.18.
$$\begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 2t^2. \end{cases}$$

5.20.
$$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = (t + 1/t)/2. \end{cases}$$

5.22.
$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

5.24.
$$\begin{cases} x = \cos at, \\ y = \sin at. \end{cases}$$

5.26.
$$\begin{cases} x = \cos(t/2), \\ y = t - \sin t. \end{cases}$$

5.28.
$$\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = e^{t^2}. \end{cases}$$

5.30.
$$\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = at \sin t. \end{cases}$$

6. Решить следующие задачи.

6.1. Под каким углом синусоида $y = \sin x$ пересекает прямую $y = 1/2$?

6.2. Показать, что гиперболы $xy = 8$ и $x^2 - y^2 = 12$ пересекаются под прямым углом.

6.3. Определить угол, под которым пересекаются кривые $x^2 + y^2 = 8$ и $y^2 = 2x$.

6.4. Под каким углом пересекаются гипербола $y = 1/x$ и парабола $y = \sqrt{x}$?

6.5. На параболе $y = x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней параллельна секущей?

6.6. Канат висячего моста имеет форму параболы и прикреплен к вертикальным опорам, отстоящим одна от другой на расстоянии 200 м. Самая нижняя точка каната находится на 40 м ниже точек подвеса. Найти угол между канатом и опорами.

6.7. При каком значении a кривая $y = (ax + x^3)/4$ пересекает ось Ox под углом 45° ?

6.8. Найти угол пересечения кривой $y = x - x^3$ и прямой $y = 5x$.

6.9. Найти угол пересечения линий $y = 1 + \sin x$ и $y = 1$.

6.10. Найти угол пересечения линий $y = \sqrt{2} \sin x$ и $y = \sqrt{2} \cos x$.

6.11. Найти угол пересечения кривых $y = x^3$ и $y = 1/x^2$.

6.12. Составить уравнения касательной и нормали к полукубической параболе $x = t^2$, $y = t^3$, проведенных в точке $t = 2$.

6.13. Найти угол пересечения кривых $x^2 + y^2 = 5$ и $y^2 = 4x$.

6.14. Определить, под каким углом кривая $y = (x-1)/(1+x^2)$ пересекает ось абсцисс.

6.15. Найти точки, в которых касательные к графикам функций $f(x) = x^3 - x - 1$ и $\varphi(x) = 3x^2 - 4x + 1$ параллельны.

6.16. Записать уравнения касательных и нормалей к кривой $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ в точках пересечения ее с осью Oy .

6.17. Записать уравнения касательных и нормалей к кривой $y = 4x - x^3$ в точках пересечения ее с осью Ox .

6.18. Записать уравнение касательных к гиперболе $xy = 4$ в точках с абсциссами $x_1 = 1$, $x_2 = -4$ и найти угол между касательными.

6.19. На параболу $y = x^2 + 5x + 3$ взяты две точки с абсциссами $x = -2$ и $x = 3$. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна секущей, проведенной через эти точки?

6.20. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 3y^2 + 9x + 14 = 0$ в точке $(-2, 3)$.

6.21. Записать уравнение нормали к астроиде $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ в точке, для которой $t = \pi/4$.

6.22. Составить уравнение той нормали к кривой $y = \ln(2x + 1)$, которая перпендикулярна к биссектрисе первого и третьего координатных углов.

6.23. Найти расстояние от вершины параболы $y = x^2 - 4x + 5$ до касательной к ней в точке пересечения параболы с осью Oy .

6.24. В уравнении параболы $y = x^2 + bx + c$ определить b и c , если известно, что парабола касается прямой $y = x$ в точке $x = 2$.

6.25. Провести касательную к кривой $y = (x+9)/(x+5)$ так, чтобы она прошла через начало координат. Записать уравнение этой касательной.

6.26. Найти угол, под которым пересекаются параболы $y = (x-2)^2$ и $y = -4 + 6x - x^2$.

6.27. Найти углы, под которыми пересекаются эллипс $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ и парабола $4y = 4 - 5x^2$.

6.28. Составить уравнение касательной к линии $y = \operatorname{arctg}(x/2)$ в точках ее пересечения с прямой $x - 2 = 0$.

6.29. Найти касательную к кривой $4x^2 + y^2 = 80$, параллельную прямой $x + y - 6 = 0$.

6.30. При каком значении параметра a парабола $y = ax^3$ касается кривой $y = \ln x$?

7. Решить следующие задачи.

7.1. Закон движения материальной точки по прямой задан формулой $s = t^3 - 3t^2 + 3t + 5$. В какие моменты времени t скорость точки равна нулю?

7.2. Две точки движутся по прямой по законам $s_1 = t^3 - 3t$ и $s_2 = t^3 - 5t^2 + 17t - 4$. В какой момент времени их скорости будут равны?

7.3. Тело, брошенное вверх, движется по закону $s = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{17}{2}t^2 + 60t - 49$. В какой момент времени скорость тела станет равной нулю? Найти наибольшую высоту подъема тела.

7.4. Скорость тела, движущегося прямолинейно, определяется формулой $v = 3t + t^2$. Какое ускорение будет иметь тело через 4 с после начала движения?

7.5. Тело массой 100 кг движется прямолинейно по закону $s = 2t^2 + 3t + 1$. Определить кинетическую энергию $mv^2/2$ тела через 5 с после начала движения.

7.6. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью a м/с. За какое время и на каком расстоянии от поверхности Земли тело достигнет наивысшей точки?

7.7. Плот подтягивается к берегу с помощью каната, который наматывается на ворот со скоростью 50 м/мин. Определить скорость движения плота в тот момент, когда его расстояние от берега будет равно 25 м, если ворот расположен на берегу на $6\sqrt{6}$ м выше поверхности воды.

7.8. Заряд, проходящий через проводник, начиная с момента времени $t = 0$, определяется формулой $Q = t^3 - 9t^2 + 15t + 1$. В какие моменты времени сила тока в проводнике будет равна нулю?

7.9. Тело массой 6 т движется прямолинейно по закону $s = -1 + \ln(t+1) + (t+1)^3$. Требуется вычислить кинетическую энергию $mv^2/2$ тела через 1 с после начала движения.

7.10. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $s = \frac{1}{5}t^5 + \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{8}t$. Определить скорость движения точки через 2 с после начала движения.

7.11. Зависимость между количеством x вещества, получаемого в результате некоторой реакции, и временем t выражается уравнением $x = 7(1 - e^{-3t})$. Определить скорость реакции через 2 с после начала опыта ($t = 0$).

7.12. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален кубу времени. Первые два оборота были сделаны колесом за 4 с. Найти угловую скорость ω колеса через 16 с после начала движения.

7.13. Тело движется по прямой Ox согласно закону $x = t^3/3 - 2t^2 + 3t$. Определить скорость и ускорение движения. В какие моменты тело меняет направление движения?

7.14. По параболе $y = x(8 - x)$ движется точка так, что ее абсцисса изменяется в зависимости от времени t по закону $x = t\sqrt{t}$. Какова скорость изменения ординаты в точке $M(1, 7)$?

7.15. Точка движется по гиперболе $y = 10/x$ так, что ее абсцисса равномерно возрастает со скоростью 1 м/с. С какой скоростью изменяется ее ордината, когда точка проходит положение (5, 2)?

7.16. Закон движения точки по оси Ox $s = 5t - t^2$. Найти скорость и ускорение точки для моментов времени $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ с.

7.17. Точка движется по параболе $y = \sqrt{6x}$ так, что ее абсцисса возрастает со скоростью 10 см/с. Какова скорость изменения ординаты в этой точке в момент, когда $x = 6$?

7.18. Закон движения точки по прямой задан формулой $s = 5t - 4/t^2 + 3$. Найти скорость и ускорение точки через 1 с после начала движения.

7.19. Точка движется по кривой $y = \sqrt[3]{x}$ в первом квадранте. Найти координаты точки в момент времени, когда скорость изменения абсциссы этой точки в 12 раз больше скорости изменения ее ординаты.

7.20. Точка движется по закону $s = 4t^3 + 2t^2 - 5$ (см). Найти скорость и ускорение движения точки через 2 с.

7.21. Радиус шара возрастает равномерно со скоростью 5 см/с. С какой скоростью увеличиваются площадь поверхности шара и его объем в момент, когда его радиус становится равным 50 см?

7.22. Электрический заряд, проходящий через проводник, начиная

с момента времени $t=0$, задается формулой $Q = 2t^2 + 10t + 9$. Найти силу тока для $t = 15$ с.

7.23. В какой точке эллипса $16x^2 + 9y^2 = 400$ ордината убывает с той же скоростью, с какой возрастает абсцисса?

7.24. Сторона квадрата растет со скоростью 5 м/с. Какова скорость изменения периметра и площади квадрата в тот момент, когда сторона его равна 50 м?

7.25. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за 8 с. Найти угловую скорость ω колеса через 32 с после начала движения.

7.26. Расстояние s м, пройденное телом за t с, определяется формулой $65s = t^3/8 + 3t^2 + t$. Найти скорость и ускорение тела при $t = 10$.

7.27. Вращающееся маховое колесо, задерживаемое тормозом, за t с поворачивается на угол $\varphi = a + bt - ct^2$, где a, b, c — положительные постоянные. Определить угловую скорость и ускорение вращения колеса. Когда колесо остановится?

7.28. Точка движется прямолинейно так, что $v^2 = 2bx$, где v — скорость точки; x — пройденный путь; b — некоторая постоянная. Определить ускорение движения точки.

7.29. В период разгона маховик вращается по закону $\varphi = t^3/10$. Через какое время после начала движения угловая скорость маховика будет равна 60 рад/с? Чему будет равно угловое ускорение тела в этот момент?

7.30. Точка движется прямолинейно по закону $s = 60t - 5t^3$. Через какой промежуток времени после начала движения точка остановится? Найти путь, пройденный точкой за это время.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Учебники и учебные пособия

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.— М.: Наука, 1980.— 336 с.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление.— М.: Наука, 1980.— 432 с.
3. Бугров Я. С., Никольский С. М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.— М.: Наука, 1980.— 176 с.
4. Воеводин В. В. Линейная алгебра.— М.: Наука, 1980.— 400 с.
5. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения.— М.: Наука, 1975.— 408 с.
6. Гурский Е. И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии.— Мн.: Выш. шк., 1982.— 272 с.
7. Долгов Н. М. Высшая математика.— Киев: Вища шк., 1988.— 416 с.
8. Жевняк Р. М., Карпук А. А. Высшая математика: В 5 ч.— Мн.: Выш. шк., 1984—1988.— Ч. 1.— 1984.— 223 с.
9. Ильин В. А., Позняк В. Г. Линейная алгебра.— М.: Наука, 1974.— 296 с.
10. Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики.— М.: Наука, 1986.— 575 с.
11. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа: В 2 т.— М.: Высш. шк., 1981.— Т. 1.— 688 с.
12. Лихолетов И. И. Высшая математика, теории вероятностей и математическая статистика.— Мн.: Выш. шк., 1976.— 720 с.
13. Пискунов И. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: В 2 т.— М.: Наука, 1985.— Т. 1.— 432 с.
14. Рублев А. Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии.— М.: Высш. шк., 1972.— 424 с.

Сборники задач и упражнений

15. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа.— М.: Наука, 1985.— 416 с.
16. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 3 ч.— М.: Высш. шк., 1986, Ч. 1.— 446 с.
17. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Г. С. Бараненков, Б. П. Демидович, В. А. Ефименко и др.; Под ред. Б. П. Демидовича.— М.: Наука, 1978.— 380 с.
18. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии.— М.: Наука, 1983.— 244 с.
19. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты.— М.: Высш. шк., 1983.— 176 с.

20. Лихолетов И. И., Мацкевич И. П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике.— Ми.: Выш. шк., 1976.— 456 с.

21. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике.— М.: Наука, 1964.— 360 с.

22. Сборник задач по курсу высшей математики / Г. И. Кручкович, Н. И. Гутарина, П. Е. Дюбюк и др.; Под ред. Г. И. Кручковича.— М.: Выш. шк., 1973.— 576 с.

23. Сборник задач по математике для вузов: Линейная алгебра и основы математического анализа: В 2 ч. / В. А. Болгов, Б. П. Демидович, В. А. Ефименко и др.; Под ред. А. В. Ефимова, Б. П. Демидовича.— М.: Наука, 1981.— Ч. 1.— 368 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Методические рекомендации	5
1. Определители. Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений	9
1.1. Определители и их свойства. Вычисление определителей	9
1.2. Матрицы и операции над ними	15
1.3. Обратные матрицы. Элементарные преобразования. Ранг матрицы. Теорема Кронекера — Капелли	20
1.4. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений	27
1.5. Индивидуальные домашние задания к гл. 1	32
1.6. Дополнительные задачи к гл. 1	52
2. Векторная алгебра	57
2.1. Векторы. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Координаты вектора	57
2.2. Деление отрезка в данном отношении. Скалярное произведение векторов и его приложения	61
2.3. Векторное и смешанное произведения векторов и их приложения	64
2.4. Индивидуальные домашние задания к гл. 2	67
2.5. Дополнительные задачи к гл. 2	84
3. Плоскости и прямые	88
3.1. Плоскость	88
3.2. Прямая в пространстве. Прямая и плоскость	90
3.3. Прямая на плоскости	94
3.4. Индивидуальные домашние задания к гл. 3	97
3.5. Дополнительные задачи к гл. 3	112
4. Линии и поверхности	115
4.1. Линии второго порядка	115
4.2. Поверхности второго порядка	121
4.3. Линии, заданные уравнениями в полярных координатах и параметрическими уравнениями	125
4.4. Индивидуальные домашние задания к гл. 4	131
4.5. Дополнительные задачи к гл. 4	146
5. Функции. Пределы. Непрерывность функций	149
5.1. Числовые множества. Определение и способы задания функции	149
	269

5.2. Пределы последовательностей и функций. Раскрытие простейших неопределенностей	151
5.3. Замечательные пределы	154
5.4. Сравнение бесконечно малых функций. Непрерывность функций	155
5.5. Индивидуальные домашние задания к гл. 5	158
5.6. Дополнительные задачи к гл. 5	174
6. Дифференциальное исчисление функций одной переменной и его приложения	176
6.1. Производная, ее геометрический и физический смысл. Правила и формулы дифференцирования	176
6.2. Логарифмическое дифференцирование	180
6.3. Производные высших порядков	181
6.4. Дифференциалы первого и высших порядков и их приложения	184
6.5. Теоремы о среднем. Правило Лопиталя — Бернулли	187
6.6. Исследование поведения функций и их графиков	190
6.7. Схема полного исследования функции и построение ее графика	195
6.8. Практические задачи на экстремум	198
6.9. Дифференциал длины дуги и кривизна плоской линии	200
6.10. Индивидуальные домашние задания к гл. 6	205
6.11. Дополнительные задачи к гл. 6	248
Приложения	252
Рекомендуемая литература	267

Учебное издание

Рябушко Антон Петрович, **Бархатов** Виктор Владимирович,
Державец Вера Владимировна, **Юреть** Иван Ефимович

**СБОРНИК ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ**

В трех частях

Часть I

Заведующий редакцией *Л. Д. Духвалов*

Редактор *М. С. Молчанова*

Младший редактор *И. В. Моховикова*

Художник переплета

и художественный редактор *Ю. С. Сергачев*

Технический редактор *М. Н. Кислякова*

Корректоры *Т. К. Хваль, В. В. Неверко*

ИБ № 2891

Сдано в набор 04.10.89. Подписано в печать 21.09.90. Формат 84×108/32.
Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл.-печ.
л. 14,28. Усл. кр.-отт. 14,28. Уч.-изд. л. 15,29. Тираж 25 000 экз.
Заказ 2959. Цена 95 к.

Издательство «Высшая школа» Государственного комитета БССР по
печати. 220048, Минск, проспект *Машерова*, 11
Минский ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат МППО
им. Я. Коласа. 220005, Минск, ул. Красная, 23.